

三角形に内接する正方形

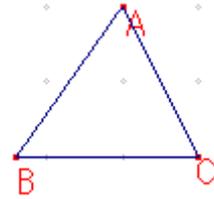
目次

第1節	三角形に内接する最大の正方形, 最小の正方形	・・・	2
第2節	相似の位置	・・・	4
第3節	基本原理と準備	・・・	5
第4節	鋭角三角形に内接する最大の正方形	・・・	9
第5節	鋭角三角形に内接する最小の正方形	・・・	11
第6節	鈍角三角形に内接する最大の正方形	・・・	14
第7節	鈍角三角形に内接する最小の正方形	・・・	17

三角形に内接する正方形

第1節 三角形に内接する最大の正方形，最小の正方形

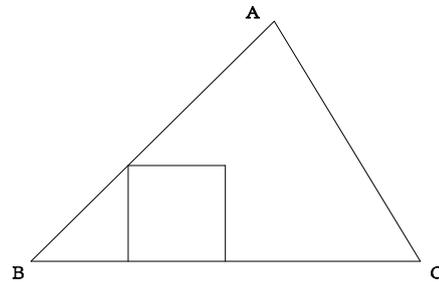
これから三角形に内接する最大の正方形，最小の正方形を考えましょう．将来は三角形に内接する正三角形，正多角形も考える予定です．



さて，三角形に内接する正方形といっても簡単ではありません．たとえば，右の三角形に内接する正方形を1つ作れといったらみなさんはどうしますか．

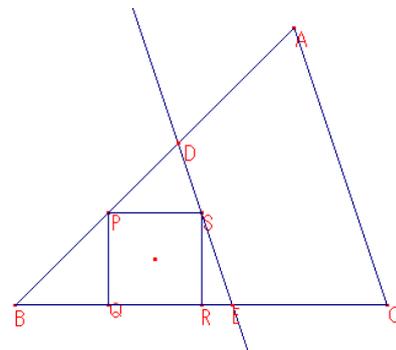
案外難しいですね．取っかかりがないからです．そこで，この問題は，いろいろ段階を経て考えることになります．まず次の問題を考えましょう．

例題1 $\triangle ABC$ の内部または周上に含まれる正方形で1辺が辺BCにあり且つ面積が最大の場合を右図の小さな正方形を利用して求めよ．



この問題を丁寧に考えましょう．

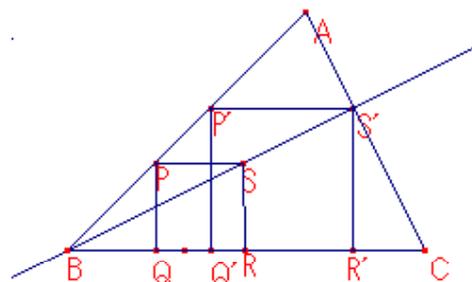
右の図は，正方形の頂点Sを通りACと平行な直線と辺AB，BCとの交点をD，Eとしたものです．



当然 $\triangle DBE \sim \triangle ABC$ で，2つの三角形は相似の位置にあり，相似の中心は点Bです．

そこで，Bを中心として $\triangle DBE$ を相似拡大し $\triangle ABC$ としたとき，正方形PQRSがどうなるかを調べればよいわけです．それを求めましょう．

正方形PQRSが正方形 $P'Q'R'S'$ になったとすると，3点B，S， S' は一直線上にあり，さらに S' は辺AC上であるから，BSのSへの延長とACとの交点が S' となることが分かります．さらに $PS \parallel P'S'$ ， $SR \parallel S'R'$ ， $PQ \parallel P'Q'$ であるから正方形 $P'Q'R'S'$ が求まります．



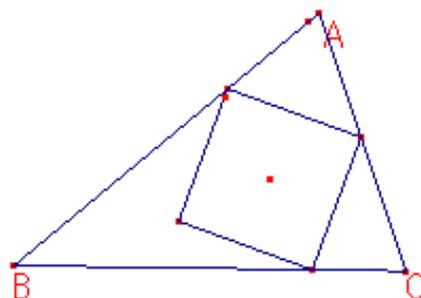
ところで、上で求めた正方形が $\triangle ABC$ 内の最大面積の正方形とは限りません。なぜか分かりますか。そうです、1辺が辺 CA 、 AB に平行な場合や、1辺がどの辺にも平行でない場合も考える必要があります。

問題を説明するための準備が整いました。これから考える問題をきちんと書いておきましょう。

問題1 $\triangle ABC$ を与えたとき、この三角形に含まれる最大の正方形を求める。

以後、 $\triangle ABC$ の各辺上に少なくとも1つの頂点がある正方形を $\triangle ABC$ に内接する正方形と呼ぶことにします。

問題2 $\triangle ABC$ を与えたとき、この三角形に内接する最小の正方形を求める。



以上で、これから考える問題が明確になりました。これから時間をかけてゆっくり考えていきます。

第2節 相似の位置

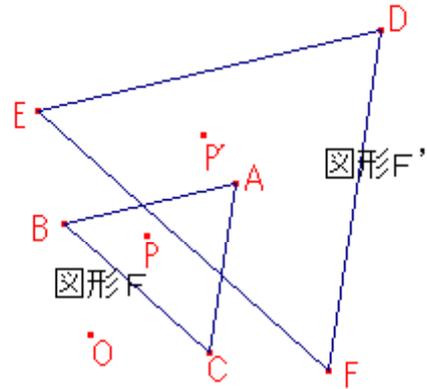
ここでは、これからの議論の基礎になる相似の位置を復習します。
まず、相似の位置の定義です。

定義

右の図の

図形F : $\triangle ABC$, 図形F' : $\triangle DEF$
のように、図形F上の任意の点Pとこれに対応する図形F'上の点P'について

- (i) P, P' を結ぶ直線は常に定点を通る。
- (ii) (i) の定点をOとすればPをどこにとっても $OP : OP'$ は一定である。



この定義では不便です。2つの図形が相似の位置にあることを示すには、すべての対応点について (i), (ii) を示す必要があります。実際は多角形等の線分だけで囲まれた図形 (これを直線図形といいます) について対応する頂点だけ (i) (ii) を満たせば2つの図形が相似の位置にあることが証明できます。

ここでは三角形の場合に証明します。

補助命題

線分AB, 線分CDについて直線AC, 直線BD
が点Oで交わり,

$$OA : OC = OB : OD \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たすとする。線分AB上の点P, 線分CD上の点P' がそれぞれ線分AB, CDを同じ比に内分する点であるなら, 3点O, P, P' は一直線上にあり

$$OA : OC = OB : OD = OP : OP'$$

が成り立つ。

証明 ①より $\triangle OAB \sim \triangle OCD$

$$\therefore AB \parallel CD, AB : CD = OA : OC$$

$\triangle OAP$ と $\triangle OCP'$ で

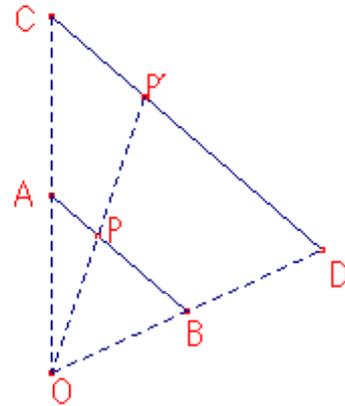
$$AP : AB = CP' : CD$$

$$\therefore AP : CP' = OA : OC$$

さらに $\angle A = \angle C$ より

$$\triangle OAP \sim \triangle OCP'$$

$$\therefore \angle AOP = \angle COP'$$



ゆえに、3点O, P, P' は同一直線上にあり

$$OP : OP' = OA : OC$$

が成り立つ.

定理 1

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において

(i) 3直線AD, BE, CFが一点Oで交わる

(ii) $OA : OD = OB : OE = OC : OF$

が成り立つなら、 $\triangle ABC$ 上の任意の点Pとこれに対応する $\triangle DEF$ 上の点P' について次の(iii) (iv)を満たす.

(iii) P, P' を結ぶ直線は必ず点Oを通る

(iv) $OP : OP' = OA : OD$ が成り立つ

定理 1 の証明

$\triangle ABC$ 上の点Pと $\triangle DEF$ 上の点P' が対応する

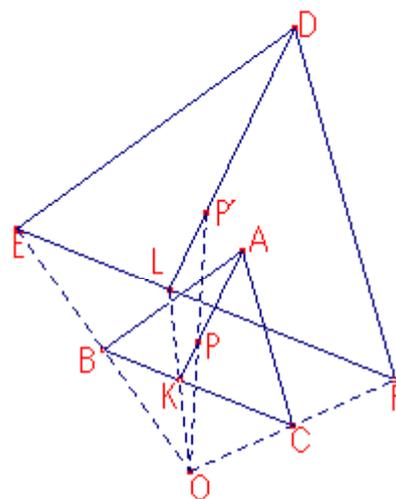
点とは、APの延長とBCとの交点をK,

DP' の延長とEFとの交点をLとすると

$$AP : PK = DP' : P' L \quad \dots \textcircled{1}$$

$$BK : KC = EL : LF \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つことである.



まず、P, P' が対応する点であるから

(i), (ii) および②よりL, K, Oは同一直線上にあり,

$$OK : OL = OB : OE \quad \dots \textcircled{3}$$

さらに、線分AKと線分DLで同様にO, P, P' は同一直線上にあり

$$OP : OP' = OB : OE$$

したがって定義が証明された.

証明より分かるように、定理は一般の多角形で成り立つ.

定理のもとで相似の位置にあることの定義を扱いやすいように変える.

定義

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において

(i) 3直線AD, BE, CFに一点で交わりその点をOとする

(ii) $OD : OA = OE : OB = OF : OC$

がなりたつとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は相似の位置にあるといい、定点Oを

相似の中心という. また $OD : OA = k : 1$ のとき $k : 1$ をこの相似の位置の相似比とい

う。

相似の位置についての重要な性質は次の定理です。

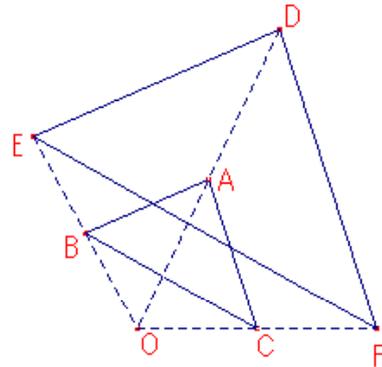
定理 2 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が相似の位置にあるとき

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ でありかつ $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CA \parallel FD$ が成り立ちます。

証明 $OD : OA = OE : OB = OF : OC$ より $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CA \parallel FD$ がなりたち、さらに

$$AB : BC : CA = DE : EF : FD$$

より $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ が成り立ちます。



次に定理 2 の逆の命題を考えましょう。すなわち

定理 3 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ でありかつ

$AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CA \parallel FD$

が成り立つとき $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は相似の位置にある。

この命題は成り立つでしょうか。まず例を扱きましょう。

cabri II で次のことをしてみましょう。

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ を相似の位置に置き、片方の三角形たとえば $\triangle DEF$ を平行移動し、直線 AD , BE , CF が一点で交わるかどうかを調べる。さらに次のことをやってみましょう。直線 AD , BE , CF をまず引いてから、片方または両方の三角形を平行移動してみよう。

このような実験はとても大切です。時間をいとわず是非やりましょう。

証明 2 直線 AD, BE の交点を O , 2 直線 AD, CF の交点を O' とする。 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の相似比を $1 : k$ とする。このとき、

$$AB \parallel DE \text{ より } OA : OD = AB : DE$$

$$AC \parallel DF \text{ より } O'A : O'D = AC : DF$$

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ より

$$AB : DE = AC : DF$$

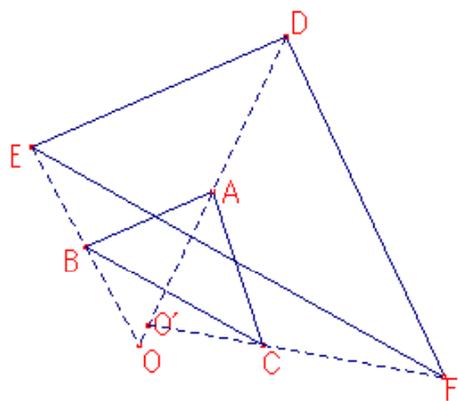
したがって、

$$OA : OD = O'A : O'D$$

O と O' は一致し、 AD, BE, CF は 1 点で交わりその点を O とすれば

$$OA : OD = OB : OE = OC : OF$$

ゆえに、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は相似の位置にある。



証明から分かるように定理3は一般の多角形で成り立ちます。

三角形ではさらに次の定理4が成り立ちます。次の定理4はとても役に立ちます。

定理4 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の各対応辺がそれぞれ平行であるときすなわち

$$AB \parallel DE, BC \parallel EF, CA \parallel FD$$

がなりたつとき $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は相似の位置にある。

証明 2直線AD, BEの交点をO,

OCとEFとの交点をF'とする。

$AB \parallel DE$ より

$$OA : OD = OB : OE$$

$BC \parallel EF$ より

$$OB : OE = OC : OF'$$

$$\therefore OA : OD = OC : OF'$$

$$\therefore AC \parallel DF'$$

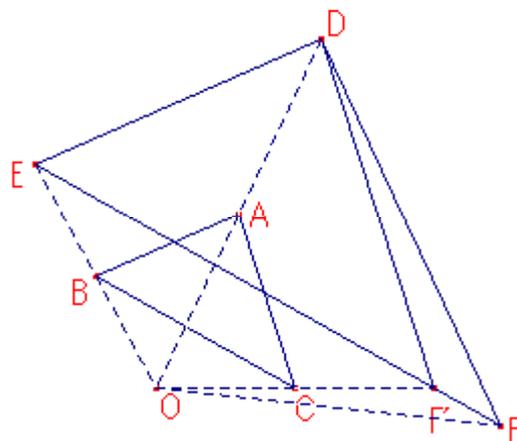
仮定より $CA \parallel FD$

であるからFとF'は一致する。

したがって、

$$OA : OD = OB : OE = OC : OF$$

が成り立ち、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は相似の位置にある。



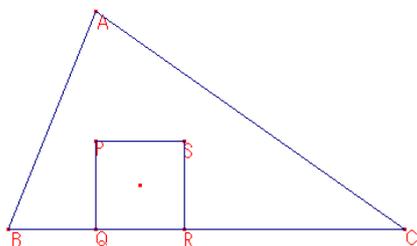
定理4は四角形以上の多角形では成り立ちません。

たとえば、長方形を考えれば分かるように、対応辺が平行であっても相似でない例がたくさんあります。定理4が成り立つのは三角形だけであることに注意しましょう。

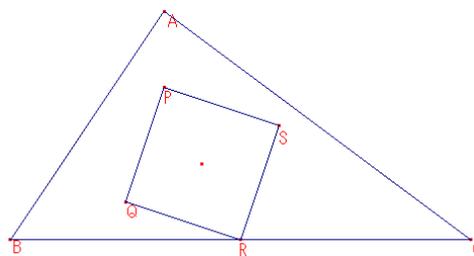
さて、本題に戻しましょう。

問題 次の各場合において、正方形を拡大し三角形に内接する正方形を作りましょう。

(1)

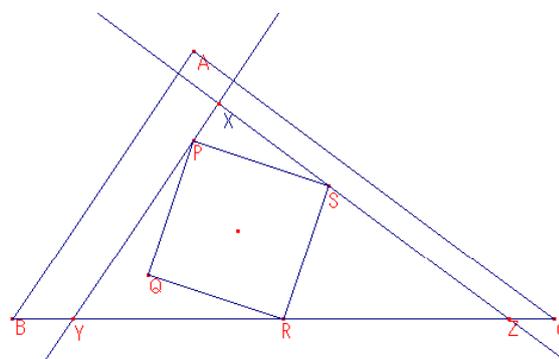


(2)



解説 (2) Pを通りABに平行な直線とSを通りACと平行な直線を引き $\triangle ABC$ と相似な $\triangle XYZ$ を作りましょう。

$\triangle ABC$ と $\triangle XYZ$ は対応辺が平行なので相似の位置にあります。相似の中心は分かりますか。そうです、AXとBCの交点です。それをOとすれば、OPとABの交点がP'、OSとACの交点がS'である正方形P'Q'R'S'が $\triangle ABC$ に内接する正方形になります。

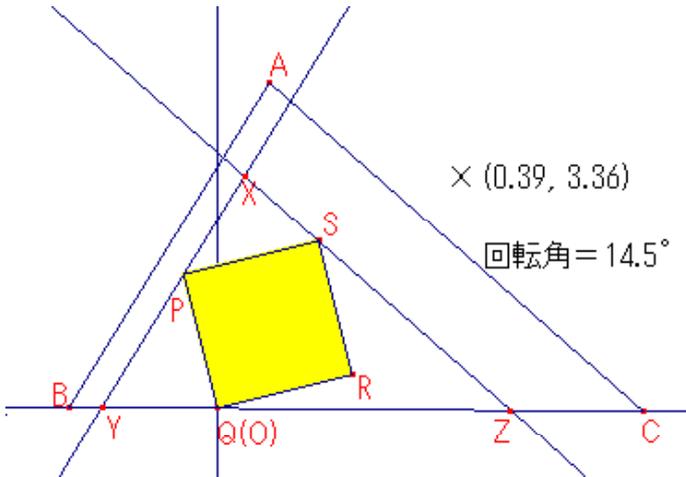


さて、(1)、(2)の場合のどちらの方が、内接する正方形は大きいでしょうか。ここでは、中の小さな正方形を一定(1辺の長さ1)とし、 $\triangle XYZ$ の大きさに注目します。すなわち、点Xのy座標が大きい方が内接する正方形は小さくなります。この考えで、これから議論を進めていきます。

第3節 基本原理と準備

これから、 $\triangle ABC$ を与えられたとき、内接する正方形の最大値と最小値を調べましょう。

1辺の長さ1の正方形PQRSをまず2辺がx軸とy軸上にあるように置きます。正方形をQ(原点でもある)の周りに回転させ(図は 14.5° 回転したもの)、そのときPを通りABに平行な直線、Sを通りACに平行な直線およびx



軸よりなる三角形を $\triangle XYZ$ とする。正方形を回転させたときの $\triangle XYZ$ を調べ、 $\triangle XYZ$ が一番小さいときが $\triangle ABC$ に内接する正方形が一番大きくなり、 $\triangle XYZ$ が一番大きいときが $\triangle ABC$ に内接する正方形が一番小さくなります。 $\triangle XYZ$ の大きさはを調べるのは、点Xの高さに注目するのが一番簡単そうです。

cabri はとても便利です。正方形を回転させて点Xのy座標を表示し、調べてみましょう。

これから議論を進めていくためのいくつかの注意をいたしましょう。

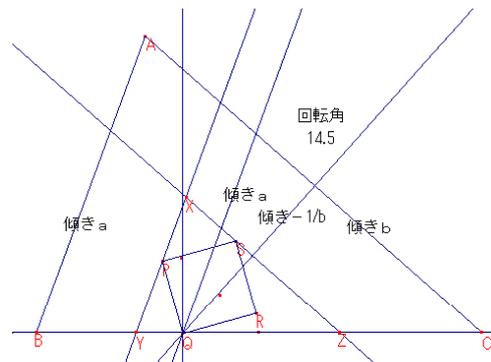
1. まず、鈍角三角形のときは $\angle A$ を鈍角にすればよいので、直線ABの傾きをa、直線ACの傾きをbとすれば $a > 0$ 、 $b < 0$ としてよい。以後特別の断りがない限り、 $\triangle ABC$ で直線ABの傾きをa、直線ACの傾きをbとします。

1. Qを通りACに垂直な直線とQを通りABに平行な直線を引きます。

$$\tan \theta_0 = -\frac{1}{b}, \quad \tan \theta_1 = a$$

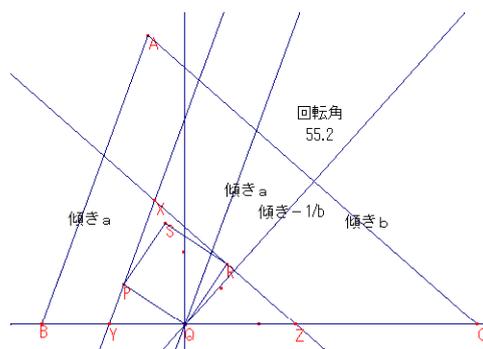
で θ_0 、 θ_1 を定めれば、正方形PQRSの回転角 θ は次の場合分けが必要です。

(i) $0^\circ \leq \theta \leq \theta_0$ のとき (図1).



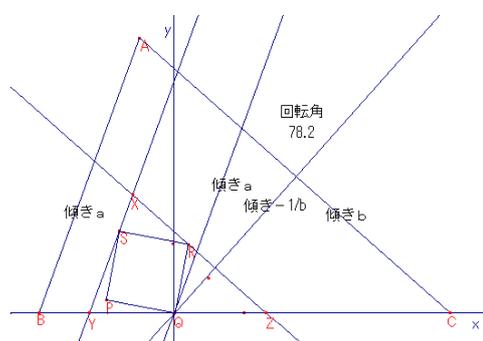
(図1)

(ii) $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ のとき (図2). すなわち, 点Pを通りABに平行な直線とRを通りACに平行な直線との交点をXとします.



(図2)

(iii) $\theta_1 \leq \theta \leq 90^\circ$ のとき (図3). すなわち 点Sを通りABに平行な直線とRを通りACに平行な直線との交点をXとします.



(図3)

上で定義 θ_0 , θ_1 を用いれば, 最初は1辺がBC上にあった正方形が, θ_0 回転したとき1辺が辺AC上になり, θ_1 回転してとき1辺がAB上になり, 90° 回転すると1辺がBC上に戻るようになります.

3. 対象性より $|b| \leq a$ とします. すなわち $\triangle ABC$ は $\angle B \geq \angle C$ ($AB \leq AC$) を満たすと仮定します. また, BからACに垂線の足を考えれば分かるように,

$$A < 90^\circ \text{ のとき } -\frac{1}{b} < a$$

$$A = 90^\circ \text{ のとき } -\frac{1}{b} = a$$

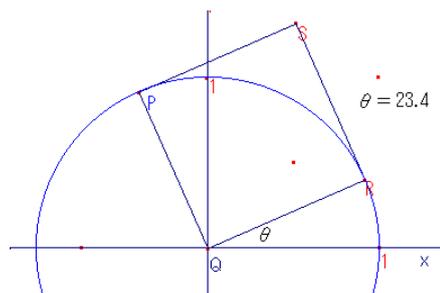
$$A > 90^\circ \text{ のとき } -\frac{1}{b} > a$$

となります. したがって, 鋭角三角形と鈍角三角形では場合分けが異なることになります.

4. 正方形の頂点の座標と頂点Xのy座標

2辺がx, y軸上にある1辺の長さ1の正方形PQRSをQの周りに θ だけ回転させたとき (右図は $\theta = 23.4^\circ$),

$$R(\cos \theta, \sin \theta), P(-\sin \theta, \cos \theta),$$



$$S(\cos \theta - \sin \theta, \sin \theta + \cos \theta)$$

となります。2で考えた場合分けにしたがって、Xのy座標を求めましょう。

$\tan \theta_0 = -\frac{1}{b}$, $\tan \theta_1 = a$ で θ_0 , θ_1 を定め、正方形PQRSの回転角を θ とする。

(i) $0^\circ \leq \theta \leq \theta_0$ のとき

Pを通り傾きがaの直線の方程式は

$$y - \cos \theta = a(x + \sin \theta) \quad \dots \textcircled{1}$$

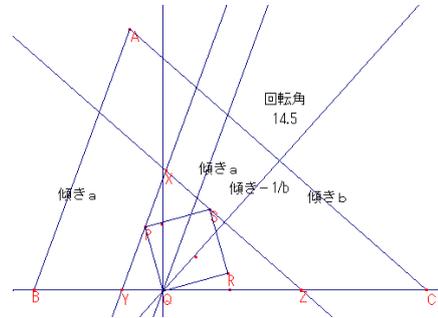
Sを通り傾きbの直線の方程式は

$$y - (\sin \theta + \cos \theta) = b(x - \cos \theta + \sin \theta) \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②よりXのy座標は

$$(a-b)y = a \sin \theta + (a-ab-b) \cos \theta = m \sin(\theta + \alpha)$$

$$\text{ただし } m = \sqrt{a^2 + (a-ab-b)^2}, \quad \tan \alpha = \frac{a-ab-b}{a}$$



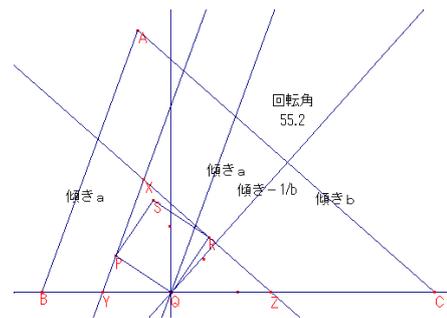
..... ③

..... ④

(ii) $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ のとき、Xのy座標は

$$(a-b)y = (a-ab) \sin \theta + (-ab-b) \cos \theta = m \sin(\theta + \beta)$$

$$\text{ただし, } m = \sqrt{(a-ab)^2 + (ab+b)^2}, \quad \tan \beta = \frac{-ab-b}{a-ab}$$

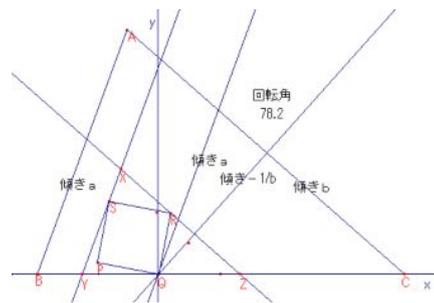


(iii) $\theta_1 \leq \theta \leq 90^\circ$ のときXのy座標は

$$(a-b)y = (a-ab-b) \sin \theta - b \cos \theta = m \sin(\theta + \gamma)$$

$$\text{ただし, } m = \sqrt{(a-ab-b)^2 + b^2}, \quad \tan \gamma = \frac{-b}{a-ab-b}$$

以上で準備が終了いたしました。次から、鋭角、鈍角に分け内接する最大の正方形、最小の正方形を求めます。

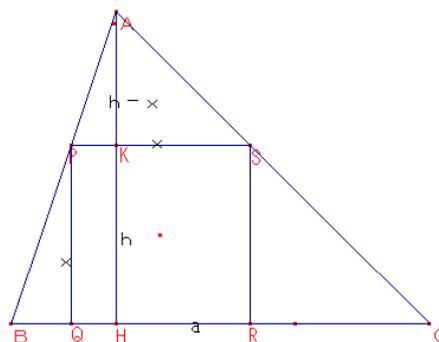


第4節 鋭角三角形に内接する最大の正方形

第3節で調べた (i) (ii) (iii) の場合をみましょう, $\triangle ABC$ の内側にできた $\triangle XYZ$ の頂点 X の y 座標が計算してあります. どの場合も, $\sin \theta$, $\cos \theta$ の係数が正であるから, α , β , γ は $0^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$ を満たします. また, θ の動く範囲は高々 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ であるから, 頂点 X の y 座標のグラフは上に凸になります. したがって, どの場合も, 頂点の y 座標は端点のいずれかで最小値を取ることになります. したがって, $\triangle ABC$ に内接する最大の正方形は, 正方形の1辺が三角形のいずれかの辺上にある場合を調べればよいことが分かりました. すなわち, 辺 AB , BC , CA 上に1辺がある正方形の最大のもを見つければよいことが分かりました.

まず次の問題を解く必要があります.

問題 鋭角三角形 ABC で, 辺 BC 上に1辺がある最大の正方形 (右図の正方形 $PQRS$) の1辺の長さを $BC = a$, $AH = h$ で表せ.



解 正方形の1辺の長さを x とすれば

$$AP : AB = AK : AH$$

$$\therefore x : a = h - x : h \quad \therefore x = \frac{ah}{a+h}$$

後は, 3辺 BC , CA , AB のどの辺上に1辺がある正方形が一番大きいかを調べるだけです.

$\triangle ABC$ で辺 BC , CA , AB を底辺としたときの高さを h_a , h_b , h_c とします. このとき

$$a h_a = b h_b = c h_c \quad \dots \textcircled{1}$$

であるから, $\textcircled{1}$ の条件の下での $a + h_a$, $b + h_b$, $c + h_c$ の大小を調べることになります. そこで

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 4xy$$

より, xy が一定なら, $|x - y|$ が小さいほど $x + y$ が大きくなります.

$a > b > c$ と仮定すれば $\textcircled{1}$ より

$$h_a < h_b < h_c \quad \dots \textcircled{2}$$

さらに高さよりは残りの2辺の方が長いから (上の図でいえば AH より AB , AC の方が長い) $h_c < b$ $\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より

$$h_a < h_b < (h_c, c) < b < a$$

となる. なお h_c と c の大小はいずれの場合もあるという意味である.

$$\therefore |c - h_c| < b - h_b < a - h_a$$

したがって、 $c + h_c$ が最小で、内接する正方形は、三角形の3辺のうち一番短い辺上に1辺があるとき一番大きくなることが分かった。

なお、議論の過程より x, y が一定のとき $x + y$ は $x = y$ のとき最小になるから次のようにまとめることができる。

定理 鋭角三角形に内接する最大の正方形は、正方形の1辺が一番短い辺上にあり内接する場合である。さらに、三角形の面積を S 、内接する正方形の面積を T とすると

$$T \leq \frac{S}{2}$$

が成り立つ。等号が成り立つのは、正方形の1辺が一番短い辺上にあり、かつ、三角形の一番短い辺の長さ、その辺を底辺としたときの高さが等しいときである。

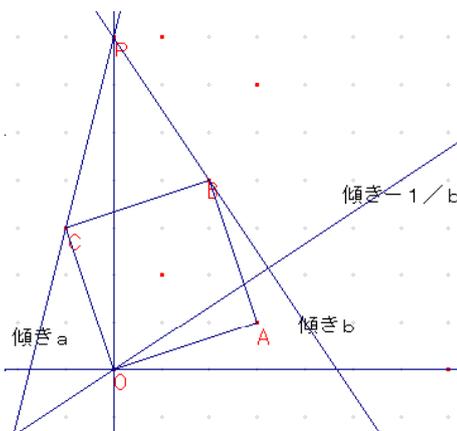
第5節 鋭角三角形に内接する最小の正方形

(i) 右の図で $A(\cos \theta, \sin \theta)$, $C(-\sin \theta, \cos \theta)$, $B(\cos \theta - \sin \theta, \cos \theta + \sin \theta)$ とする. すなわち, 1辺の長さ1の正方形を, 原点の回りに θ だけ回転させたもの. このとき, 点 C を通る傾き a の直線は

$$y - \cos \theta = a(x + \sin \theta) \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

点 B を通り傾き b の直線は

$$y - \cos \theta - \sin \theta = b(x - \cos \theta + \sin \theta) \quad \dots \dots \textcircled{2}$$



①, ②の交点の y 座標は

$$(a - b)y = a \sin \theta + (a - a b - b) \cos \theta = m \sin(\theta + \alpha) \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

$$\text{ただし } m = \sqrt{a^2 + (a - ab - b)^2}, \quad \tan \alpha = \frac{a - ab - b}{a} \quad \dots \dots \textcircled{4}$$

OA の傾きが $\frac{1}{b}$ のところで P の代わりに C を通り傾き a の直線と A を通り傾き b の直線の交点 Q を考えることになるから ③を考える θ の範囲は

$$\tan \theta_0 = -\frac{1}{b} \quad \dots \dots \textcircled{5}$$

により θ_0 を定めれば $0 \leq \theta \leq \theta_0$.

ここで, $\theta_0 + \alpha$ と $\frac{\pi}{2}$ の大小を調べよう.

ここで④, ⑤より,

$$\tan(\theta_0 + \alpha) = \frac{-a + ab - ab^2 - b^2}{a - b} < 0. \quad (\because a > 0, b < 0)$$

したがって, $\theta_0 + \alpha > \frac{\pi}{2}$ が分かりました.

このことより, P の y 座標は, $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$, すなわち, $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ のとき最大値をとります.

(ii) 直線OAの傾きが $-\frac{1}{b}$ から a の間のと
き.

Cを通る傾き a の直線は

$$y - \cos \theta = a (x + \sin \theta) \dots \textcircled{1}$$

Aを通り傾き b の直線は

$$y - \sin \theta = a (x - \cos \theta) \dots \textcircled{6}$$

2直線①, ⑥の交点Qのy座標は

$$\begin{aligned} (a-b)y &= (a-ab)\sin \theta \\ &\quad + (-ab-b)\cos \theta \\ &= m \sin(\theta + \beta) \end{aligned}$$

ただし $\tan \beta = \frac{-ab-b}{a-ab}$, $m = \sqrt{(a-ab)^2 + (-ab-b)^2}$

θ の動く範囲は $-\frac{1}{b} \leq \tan \theta \leq a$ である.

$\theta + \beta$ の動く範囲に $\frac{\pi}{2}$ が含まれるかどうかを調べよう.

$\tan \theta_0 = -\frac{1}{b}$, $\tan \theta_1 = a$ で θ_0 , θ_1 を定めると

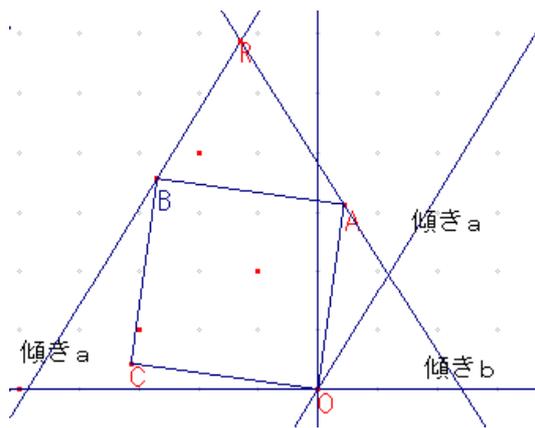
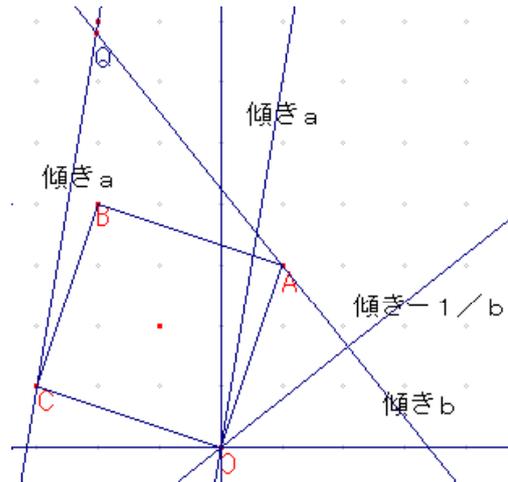
$$\tan(\theta_0 + \beta) = \frac{-a+ab-ab^2-b^2}{-b(ab+1)} \quad \tan(\theta_1 + \beta) = \frac{a^2-a^2b-ab-b}{a(ab+1)} \dots \textcircled{7}$$

⑦の2式は異符号であるから $\theta + \beta$ の動く範囲に $\frac{\pi}{2}$ が含まれることが分かる.

したがって、Qのy座標は $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$ のと

き, すなわち $\theta = \frac{\pi}{2} - \beta$ のとき最大値をとる.

(iii) 直線OAの傾きが a から ∞ までのときは(i)の場合をy軸に関して対称移動したものであるから同様ある. 交点Rのy座標は

$$(a-b)y = (a-ab-b)\sin \theta - b \cos \theta$$


以上の準備の元で，鋭角三角形に内接する最小の正方形を求めよう．右図のようにBCをx軸に平行にとり，辺ABの傾きをa，辺ACの傾きをbとする．このとき，

(i) の場合は

$$P = \sqrt{a^2 + (a-ab-b)^2}$$

(ii) の場合は

$$Q = \sqrt{(a-ab)^2 + (-ab-b)^2}$$

(iii) の場合は

$$R = \sqrt{(a-ab-b)^2 + b^2}$$

を考え，その最大値をもとめればよい．

さて，対象性より $a > -b$ のとき考えればよく，

$$a > -b \Leftrightarrow B > C \Leftrightarrow AC > AB$$

であり，このときは明らかに $P > R$ ．したがって，あとはPとQの大きさを調べればよい．

$$P^2 - Q^2 = a(a - 2b - ab^2)$$

$$\text{一方 } \tan A = \tan(\pi - B - C) = -\tan(B + C) = -\frac{a-b}{1+ab}$$

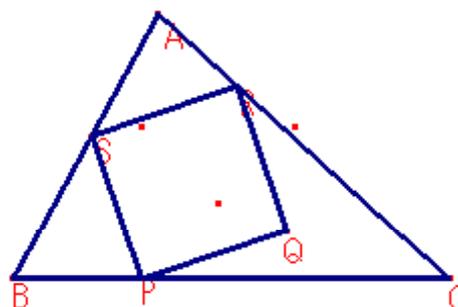
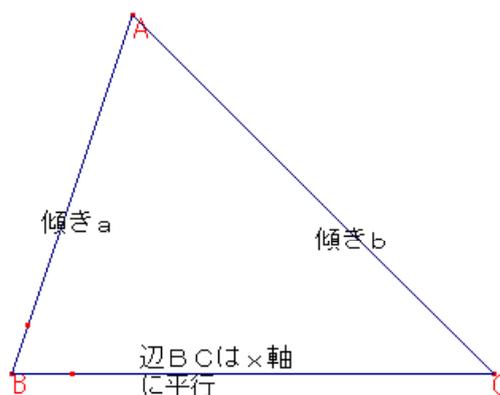
そこで， $\tan A$ と $\tan C$ の大きさを調べると

$$\tan A - \tan C = -\frac{a-b}{1+ab} - (-b) = -\frac{a-2b-ab^2}{1+ab}$$

$1 - ab < 0$ であるから A, C の大小と P, Q の大小は一致する．

以上より，最小辺以外の残りの2辺間の移動のときに最小の正方形が現れる．具体的には，たとえば $\triangle ABC$ で辺ABが最小辺のとき．内接する最小の正方形は右図の場合で，PQと辺BCのなす角 θ

は $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ($\tan \alpha = \frac{a-ab-b}{a}$) である．



以上で，鋭角三角形の場合は終了した．

第6節 鈍角三角形に内接する最大の正方形

鋭角三角形で調べた (i), (ii), (iii) の場合と同様に P, Q, R の最小値はそれぞれ, 端点のどちらかで取る (最大値は鋭角の場合と同様ではない). したがって, 1 辺がいずれかの辺上にある場合を調べればよい.

まず, $\angle A$ が鈍角である鈍角三角形 ABC に含まれる, 辺 AB 上に 1 辺を持つ最大の正方形は, 直角三角形 ABD に内接する正方形である. したがって, 1 辺の長さは

$$\frac{AB \cdot AD}{AB+AD}$$

である.

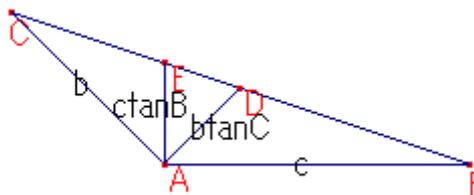
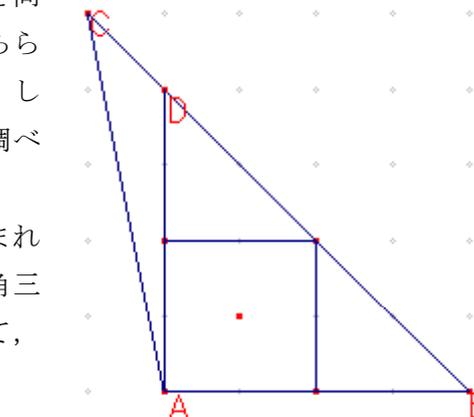
まず, $\angle A$ が鈍角である三角形で, AB 上に 1 辺がある正方形と AC 上に 1 辺がある正方形の大小を調べる.

(辺 AB 上に 1 辺がある正方形の 1 辺の長さ)

$$= \frac{c^2 \tan B}{c + c \tan B} = \frac{c \sin B}{\sin B + \cos B} \quad \dots \textcircled{1}$$

(辺 AC 上に 1 辺がある正方形の 1 辺の長さ)

$$= \frac{b^2 \tan C}{b + b \tan C} = \frac{b \sin C}{\sin C + \cos C} \quad \dots \textcircled{2}$$



正弦定理より $c \sin B = b \sin C$ であるから①, ②の大小は $\frac{1}{\sin B + \cos B}$ と $\frac{1}{\sin C + \cos C}$ の大小を一致する.

$\sin B + \cos B = \sqrt{2} \sin(B + \frac{\pi}{4})$ であるから $\sin B + \cos B$ と $\sin C + \cos C$ では, B, C のうち,

$\frac{\pi}{4}$ に近い方が大きい.

$b < c$ ($\Leftrightarrow B < C$) とすると $B + C < \frac{\pi}{2}$ より

$B < C < \frac{\pi}{4}$ のとき明らかに $\sin B + \cos B < \sin C + \cos C$ であり

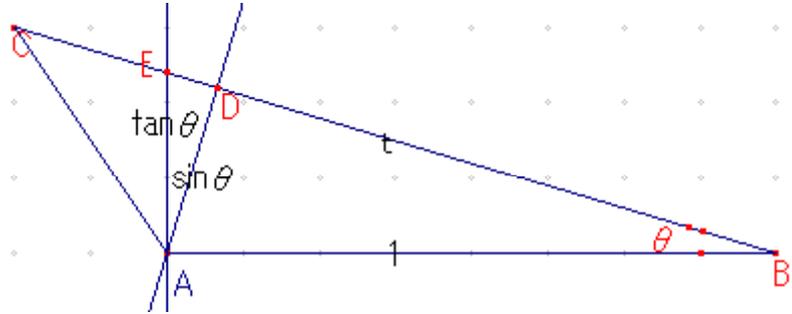
$B < \frac{\pi}{4} < C$ のとき $\frac{B+C}{2} < \frac{\pi}{4}$ であるから, $B < \frac{B+C}{2} < \frac{\pi}{4} < C$ より

$$\sin B + \cos B < \sin C + \cos C$$

が成り立つ.

$$\therefore b < c \Leftrightarrow \sin B + \cos B < \sin C + \cos C \Leftrightarrow \frac{1}{\sin C + \cos C} < \frac{1}{\sin B + \cos B} \Leftrightarrow \textcircled{2} < \textcircled{1}$$

したがって、 $AC < AB$ のとき、1辺が辺 AB 上にある正方形と1辺が BC 上にある正方形を比較すればよいことが分かった。



これから、鈍角三角形の各辺上に1辺をもつ最大の正方形の1辺の長さを求める。

$\angle A$ が鈍角である鈍角三角形で、 $AB = 1$ 、 $BC = t$ 、 $\angle B = \theta$ として調べる。

(AB 上に1辺がある正方形の1辺の長さ)

$$= \frac{AB \cdot AE}{AB + AE} = \frac{\tan \theta}{\tan \theta + 1} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \quad \dots \textcircled{1}$$

同様に

$$(\text{BC 上に1辺がある正方形の1辺の長さ}) = \frac{t \sin \theta}{t + \sin \theta} \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで

$$\begin{aligned} \textcircled{1} > \textcircled{2} &\Leftrightarrow \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} > \frac{t \sin \theta}{t + \sin \theta} \Leftrightarrow t + \sin \theta > t \sin \theta + t \cos \theta \\ &\Leftrightarrow (t - 1) \sin \theta + t \cos \theta < t \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

③の右辺は

$$\sqrt{(t-1)^2 + t^2} \sin(\theta + \alpha) \quad \text{ただし } \tan \alpha = \frac{t}{t-1}$$

$$f(\theta) = (t-1) \sin \theta + t \cos \theta = \sqrt{(t-1)^2 + t^2} \sin(\theta + \alpha)$$

は $f(0) = t$ であり $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ のとき最大値を取るから、グラフの対象性より

$$f(\pi - 2\alpha) = t$$

である。したがって、③を満たす θ は $0 \leq \theta < \pi - 2\alpha$ ただし α は $\tan \alpha = \frac{t}{t-1}$ を満たす。

よって、求める正方形は

$0 < \theta \leq \pi - 2\alpha$ のとき辺 BC (最長辺) 上に1辺があり、 $\pi - 2\alpha \leq \theta$ のとき辺 AB 上に1辺があるときである

今考えている鈍角三角形は A が鈍角で、 $AB \leq AC$ である場合であるから、その t の条

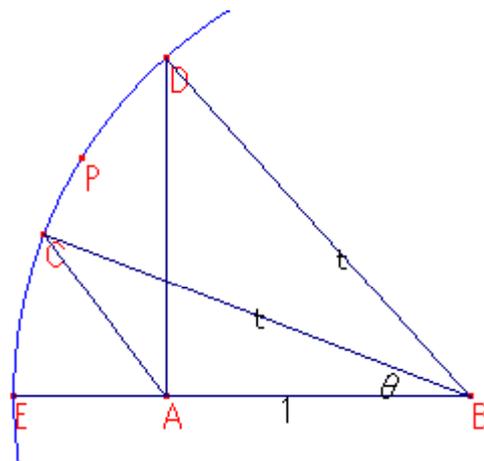
件を調べる必要がある.

右の図で円はBを中心とする半径 t の円である. 点 p が円周上をDからEまで動くとき AP の長さは減少するから,

$$1 < t < 2$$

考えればよい. さらに, $1 < t \leq \sqrt{2}$ のとき $\triangle ABC$ は常に $AC < AB$ の鈍角三角形である. さらに $\sqrt{2} < t < 2$ のとき, θ_0 を

$$\cos \theta_0 = \frac{t}{2} \quad \dots \textcircled{4}$$



によって定めれば, $0 < \theta < \theta_0$ のとき $AC < AB$ である. さらに $\textcircled{4}$ より

$$\tan \theta_0 = \frac{\sqrt{4-t^2}}{t}$$

一方, すでに調べた正方形の1辺が AB になるか BC 上になるかの境目となる θ は

$$\theta = \pi - 2\alpha \quad (\text{ただし } \tan \alpha = \frac{t}{t-1})$$

$$\therefore \tan (\pi - 2\alpha) = \frac{2t(t-1)}{2t-1}$$

$\sqrt{2} < t < 2$ のとき

$$\frac{\sqrt{4-t^2}}{t} = \frac{2t(t-1)}{2t-1} \quad \dots \dots \textcircled{5}$$

を解くと $t \doteq 1.55$

以上より鈍角三角形に内接する最大の正方形は次のようになる.

定理 1. 正方形の1辺が鈍角三角形の最長の辺上にあるか, 真ん中の長さの辺上にあるかのいずれかである.

2. A が鈍角の鈍角三角形 ABC で $AB = 1$, $BC = t$, $\angle ABC = \theta$, $AC < AB$ とす

る. このとき, $1 < t < 2$ であり, 方程式 $\frac{\sqrt{4-t^2}}{t} = \frac{2t(t-1)}{2t-1}$ の解を t_0 とすると

(i) $1 < t \leq t_0$ のとき $\tan \theta_0 = \frac{2t(t-1)}{2t-1}$ で θ_0 をさだめれば

$0 < \theta < \theta_0$ のとき正方形の1辺が BC 上にあるときで $\theta_0 < \theta$ のとき正方形の1辺が AB 上にあるときである.

(ii) $t_0 < t < 2$ のとき

常に正方形の1辺が BC 上にあるときである.

第7節 鈍角三角形に内接する最小の正方形

残された問題は、鈍角三角形に内接する最小の正方形を求めることである。

対称性より $|b| \leq a$ としてよい。さらに鈍角三角形であるから $a < -\frac{1}{b}$ である。

O A と x 軸のなす角を θ とする。

(i) $0 \leq \tan \theta \leq a$

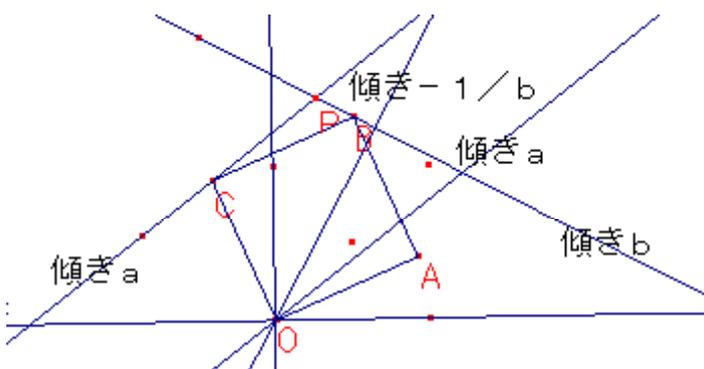
(ii) $a \leq \tan \theta \leq -\frac{1}{b}$

(iii) $-\frac{1}{b} \leq \tan \theta$

に分けて調べる。

(i) $0 \leq \tan \theta \leq a$ のとき。

C を通り傾き a の直線と B を通り傾き b の直線との交点 P の y 座標は



$$(a-b)y = a \sin \theta + (a - a b - b) \cos \theta$$

$$= m \sin (\theta + \alpha)$$

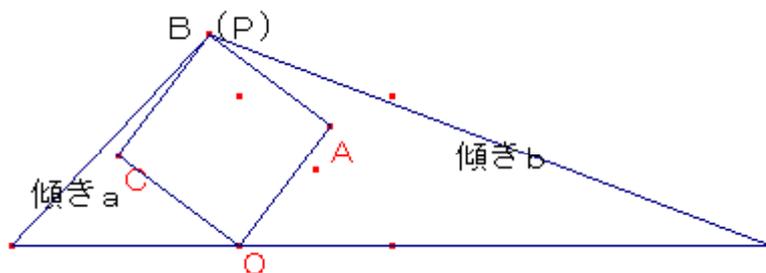
ただし $m = \sqrt{a^2 + (a-ab-b)^2}$, $\tan \alpha = \frac{a-ab-b}{a}$

(2)

$a \leq \tan \theta \leq -\frac{1}{b}$ の

とき。

P と B は一致するから、点 P の y 座標は



$$y = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

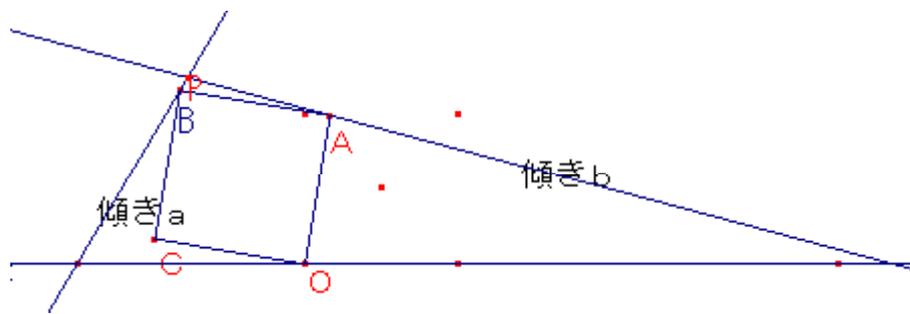
(iii)

$-\frac{1}{b} \leq \tan \theta$

のとき

点 B を通り傾き a の直線と点 A を通り傾き b の

直線交点を P とすると、点 P の y 座標 y は



$$(a-b)y = (a-ab-b)\sin\theta - b\cos\theta = \sqrt{(a-ab-b)^2+b^2}\sin(\theta+\gamma)$$

$$\text{ただし } \tan\gamma = \frac{-b}{a-ab-b}$$

$\tan\theta_0 = a$ で θ_0 を定めると $\theta_0 \leq \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} \leq \theta_0$ で議論の進め方が異なるから $a \leq 1$, $1 \leq a$ で場合分けする.

(I) $1 \leq a$ のとき

(i) の場合

$$\tan\theta_0 = a \text{ で } \theta_0 \text{ を定めると, } \frac{\pi}{4} \leq \theta_0.$$

$$\text{一方 } \tan\alpha = \frac{a-ab-b}{a} > 1 \text{ であるから } \frac{\pi}{4} < \alpha$$

$$\therefore \alpha < \frac{\pi}{2} < \theta_0 + \alpha$$

したがって, この範囲の y 座標の最大値は $\frac{\sqrt{a^2+(a-ab-b)^2}}{a-b}$

(ii) の場合

$$\frac{\pi}{2} < \theta_0 + \frac{\pi}{4} \text{ であるから, } P \text{ の } y \text{ 座標はこの範囲で単調減少.}$$

(iii) の場合.

(iii) の場合の最大値は $|b| < a$ より (i) の場合より大きくなることはない.

以上より, $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ($\tan\alpha = \frac{a-ab-b}{a}$) のとき y 座標が最大になる. したがって

このとき, 内接する正方形は最小になる.

(II) $0 < a < 1$ のとき

$$\tan\theta_0 = a \text{ で } \theta_0 \text{ を定めると, } \theta_0 \leq \frac{\pi}{4}.$$

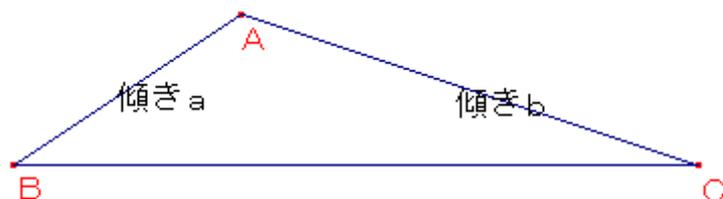
$$\tan B = a, \tan C = -b$$

したがって

$$\tan(B+C) = \frac{a-b}{1+ab} > 0$$

$$\therefore ab+1 > 0$$

さらに $-b < a$



$$\therefore 1 < \frac{1}{a} < -\frac{1}{b} \qquad \therefore 0 < a < 1 < -\frac{1}{b}$$

(i) の場合.

$$\tan \theta_0 = a, \quad \tan \alpha = \frac{a-ab-b}{a} \quad \text{より}$$

$$\tan(\theta_0 + \alpha) = \frac{a + \frac{a-ab-b}{a}}{1 - (a-ab-b)}$$

より $a - a b - b \leq 1$, $a - a b - b > 1$ に分けて議論する.

(A) $0 < a - a b - b \leq 1$ のとき

(i) の場合. $\theta_0 + \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ であるから $\theta = \theta_0$ で最大値をとる.

(ii) の場合. $a < 1 < -\frac{1}{b}$ より $\theta_0 < \frac{\pi}{4} < \theta_1$ より $\theta = \frac{\pi}{4}$ で最大値をとる.

(iii) の場合.

$$\tan \theta_1 = -\frac{1}{b} \quad \text{より} \quad \tan(\theta_1 + \gamma) = \frac{-\frac{1}{b} + \frac{-b}{a-ab-b}}{1 - \frac{1}{a-ab-b}} < 0 \quad \text{であるから}$$

$$\theta_1 + \gamma > \frac{\pi}{2}$$

よって, $\theta = \theta_1$ で最大値を取る.

以上より, (ii) の端点と (i) の最大値, (iii) の最大値が一致するから, この場合は (ii) の $\theta = \frac{\pi}{4}$ で最大値をもつ. すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき内接三角形は最小になる.

(B) $1 < a - a b - b$ のとき

$$(i) \text{ の場合} \quad \tan(\theta_0 + \alpha) = \frac{a + \frac{a-ab-b}{a}}{1 - (a-ab-b)} < 0 \quad \text{より} \quad \theta_0 + \alpha > \frac{\pi}{2}$$

したがって $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ で最大値をとる.

(ii) の場合. $\theta_0 < \frac{\pi}{4} < \theta_1$ より $\theta_0 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} < \theta_1 + \frac{\pi}{4}$

したがって $\theta = \frac{\pi}{4}$ で最大値をとる.

(iii) の場合. $|b| < a$ より, (i) の場合の最大値を超えることはない

したがって (i) の場合の最大値 $\frac{\sqrt{a^2+(a-ab-b)^2}}{a-b}$ と (ii) の場合の最大値 $\sqrt{2}$ の大きさを

調べればよい. 両辺を平方し,

$$a^2 + (a - a b - b)^2 - 2(a - b)^2 = b(a^2 b - b - 2a^2 + 2ab + 2a)$$

$$(i) \text{ の最大値} > (ii) \text{ の最大値} \Leftrightarrow a^2 b - b - 2a^2 + 2ab + 2a < 0$$

$$b(a^2 + 2a - 1) < 2a^2 - 2a$$

$$a^2 + 2a - 1 > 0 \quad (\sqrt{2} - 1 < a) \text{ のとき } b < \frac{2a^2 - 2a}{a^2 + 2a - 1}$$

$$a^2 + 2a - 1 < 0 \quad (0 < a < \sqrt{2} - 1) \text{ のとき } b > \frac{2a^2 - 2a}{a^2 + 2a - 1}$$

ちょっと複雑になったから整理しよう.

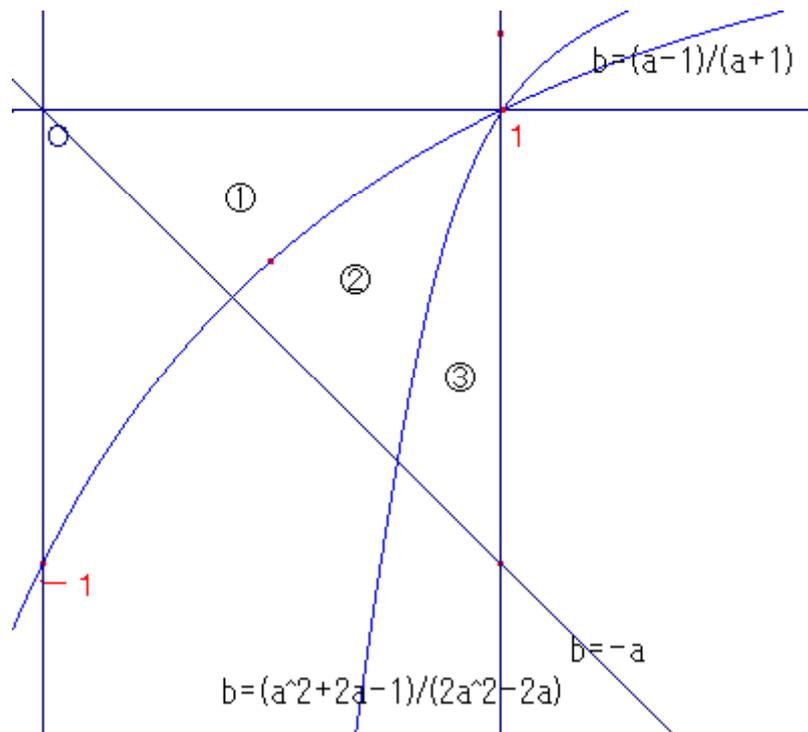
$0 < a < 1$, $a - a b - b > 1$, $a > -b$ のとき考えている. 不等式は領域で考えて方がやりやすいので. 図示すると右図になり, ②, ③だけである. さらに

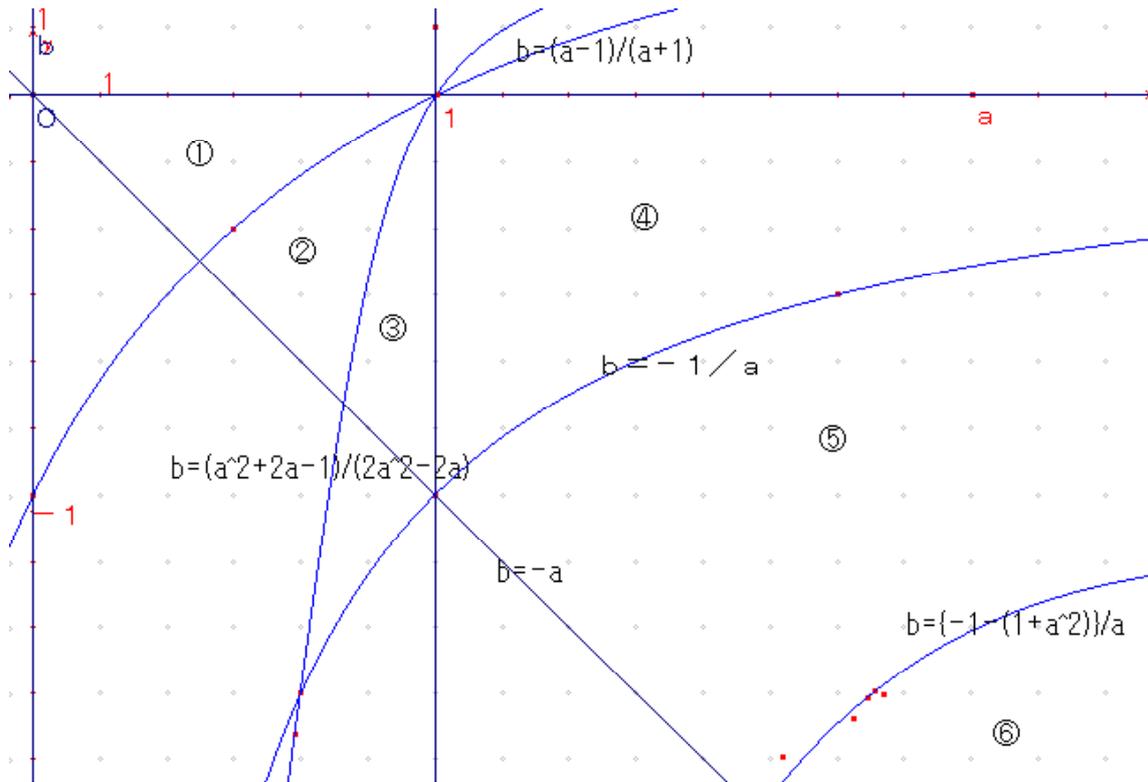
(i) の最大値 > (ii) の最大値

\Leftrightarrow ③の部分

($b = \frac{2a^2 - 2a}{a^2 + 2a - 1}$ のグラフ

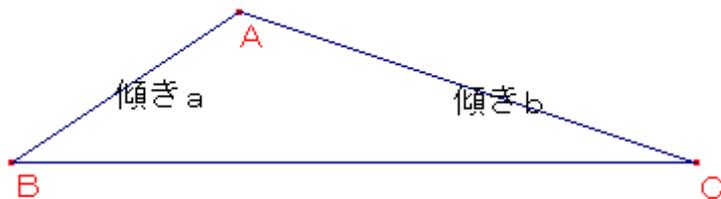
は $a = \sqrt{2} - 1$ が漸近線で, グラフの $0 < a < \sqrt{2} - 1$ の部分は x 軸より上にあることに注意する)





以上の議論をまとめると次のようになる。

∠Aが鈍角である△ABC
 で辺BCをx軸上においた
 とき、辺ABの傾きをa、
 辺BCの傾きをbとする。
 対称性より $-b \leq a$ として
 考える。



このとき内接する正方形が一番小さくなるのは

- ①のとき (ii) の場合に存在する
- ②のとき (ii) の場合に存在する
- ③のとき (i) の場合に存在する
- ④のとき (i) の場合に存在する
- ⑤のとき (i) の場合に存在する
- ⑥のとき (ii) の場合に存在する