

チェビシェフ多項式

n 次多項式 $f(x)$ と閉区間 $[a, b]$ が与えられたとき, $n - 1$ 次以下の多項式 $g(x)$ で

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

を最小にする $g(x)$ を区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の最良近似多項式といいます。なお, この近似をチェビシェフ近似といいます。

これから最良近似多項式のいろいろな性質を調べます。 $f(x)$ が 3 次または 4 次の場合を中心に扱いますが n 次の場合もほとんど内容は変わりません。

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

のように最高次 x^3 の係数が a_3 のとき, 2 次以下の任意の $g(x)$ に対して

$$f(x) - g(x) = a_3(x^3 + \dots)$$

となるので, 最良近似多項式を求めることは x^3 の係数 1 の 3 次式

$$f_3(x) = x^3 + \dots$$

で

$$\max_{x \in [a, b]} |f_3(x)|$$

を最小にする $f_3(x)$ を求める問題に帰着される。

ここで,

$$\max_{x \in [a, b]} |f_3(x)|$$

を最小にする $f_3(x)$ を求める問題を見直してみましょう。

まず, 3 次方程式

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

の区間 $[-1, 1]$ で $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$ を最小にする関数はどのような関数でしょう。考えてみましょう。下の左図のような関数になることは容易に想像できるでしょう。ちなみに, 左から, 3 次, 4 次, 5 次の場合です。もし $[-a, a]$ の場合を考えるなら, この関数を原点の周りに a 倍だけ相似拡大し, さらに y 軸方向に拡大縮小することにより得られます。

原点の周りに a 倍の相似拡大は

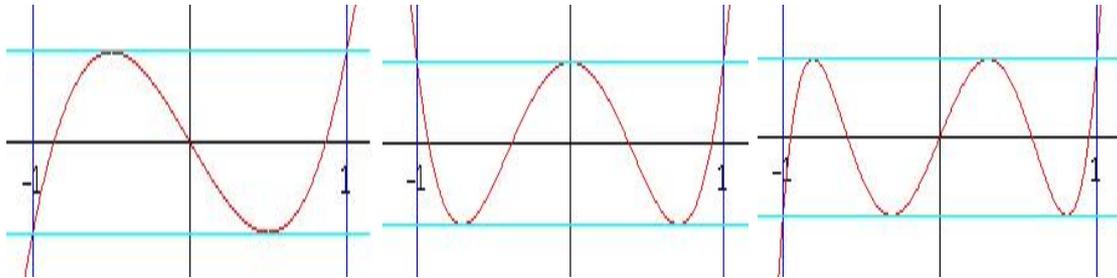
$$y = f(x) \mapsto \frac{y}{a} = f\left(\frac{x}{a}\right)$$

y 軸方向に b 倍は

$$y = f(x) \mapsto \frac{y}{b} = f(x)$$

となります。

このように原点の周りの相似変換や y 軸方向の拡大変換を用いることにより，最高次の係数を 1 にすることができるので，最高次の係数は 1 つ定めて議論すればよいことが分かります．



これらのグラフの特徴は，極大値，極小値及び端点の y 座標のそれぞれの絶対値が全部一致することです．

このような関数をどのように見つけるかが問題ですが，身近なところにあります．

それは 3 次関数でいえば $\cos 3\theta$ を $\cos \theta$ で表した

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

より $\cos \theta$ を x で置き換えた

$$f(x) = 4x^3 - 3x$$

によって $f(x)$ を定義すれば得られます．

実際

$$\cos 3\theta = f(\cos \theta)$$

が成り立つから $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ より，ここでは $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で

$$\cos 3\theta = \pm 1$$

を解けば

$$\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$$

ここで，

$$x_1 = \cos 0 = 1, x_2 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, x_3 = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, x_4 = \cos \pi = -1$$

とおけば

$$f(x_1) = 1, f(x_2) = -1, f(x_3) = 1, f(x_4) = -1$$

となります．

以下これらの内容をきちんと説明します．

最良近似多項式についての性質を調べます．まず，いくつかの定義をします．

定義

多項式 $f(x)$ に対して, 閉区間 $[a, b]$ において $|f(x)|$ が最大値をとる x の値を最大偏差点といい, 最大偏差点のうち, $f(x) > 0$ を満たすものを正の最大偏差点, $f(x) < 0$ を満たすものを負の最大偏差点という.

最大偏差点よりなる集合を $V(f)$, 正の最大偏差点, 負の最大偏差点よりなる集合をそれぞれ $V_+f(x), V_-f(x)$ で表す.

また, x^n の係数 1 の n 次多項式

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

のうち, $\max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ を最小にする多項式を $[a, b]$ における n 次の最小偏差多項式という.

次の命題は, 最小偏差多項式が唯一つしかないことを示すときの基本となる. なお, これからの命題は 3 次式の場合を考えているが, n 次式でも同様である.

命題 1

3 次方程式

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$$

が $[a, b]$ における最小偏差多項式とする. このとき $V_+(f)$ の各値で負の値をとり, $V_-(f)$ の各値で正の値をとる 2 次以下の多項式 $g(x)$ は存在しない.

証明

$g(x)$ が存在したとすると, 十分大きい n をもちいて $f(x) + \frac{g(x)}{n}$ を考えれば

$$\max_{x \in [a, b]} \left(f(x) + \frac{g(x)}{n} \right) < \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

をみたし矛盾するという方針で証明します. ただし少しデリケートな評価が必要です.

$g(x)$ が存在したと仮定する.

$g(x)$ は $V_+(f)$ で負, $V_-(f)$ で正である. 開集合 U, W で

$$V_+(f) \subset U, V_-(f) \subset W$$

かつ

$$g(U) < 0, g(W) > 0, f(U) > 0, f(W) < 0$$

を満たすものが存在する (f, g の連続性より得られるが慣れていないと分かりづらいと思う).

$$[a, b] \setminus U \cup V = A$$

とおけば, A は閉集合であり, 連続関数は閉集合で最大値をもつから

$$\max_{x \in A} |f(x)| < \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

ここで,

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| - \max_{x \in A} |f(x)| > \frac{\max_{x \in [a,b]} |g(x)|}{n}$$

をみたす正の数 n を取る.

このとき, $U \cup W$ においては f と $\frac{g}{n}$ は異符号であるから

$$\max |f + \frac{g}{n}| < \max |f|, \max \frac{|g|}{n}$$

さらに

$$\max \frac{|g|}{n} < \max |f|$$

であるから

$$\max_{x \in U \cup W} |f + \frac{g}{n}| < \max_{x \in U \cup W} |f|$$

$[a, b] \setminus U \cup V = A$ では

$$\max_{x \in A} |f + \frac{g}{n}| \leq \max_{x \in A} |f| + \max_{x \in [a,b]} \frac{|g|}{n} < \max_{x \in [a,b]} |f|$$

したがって

$$\max_{x \in [a,b]} |f + \frac{g}{n}| < \max_{x \in [a,b]} |f|$$

となり $f(x)$ が最小偏差多項式に反する. したがって, $V_+(f)$ で負かつ $V_-(f)$ で正である 2 次以下の多項式は存在しない.

命題 2

$f(x)$ を $[a, b]$ における 3 次の最小偏差多項式とする. このとき, 最大偏差点の集合 $V(f)$ はすくなくとも 4 個の点を持つ.

証明

まず, $V(f)$ の要素がすべて正や負であることはないことに注意する. もし, $V(f)$ の要素がすべて正なら, 最小値の絶対値は最大偏差より小さいから y 軸の負の方向に少しだけ平行移動して得られる関数の方が最大偏差が小さくなる.

$f(x)$ の最大偏差点が 3 個しかなかったとする. $V(f)$ の要素を x_1, x_2, x_3 とする. このとき, $b_1 = b_2 = b_3$ でない任意の b_1, b_2, b_3 に対して

$$\begin{cases} a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3 = b_1 \\ a_1 x_2^2 + a_2 x_2 + a_3 = b_2 \\ a_1 x_3^2 + a_2 x_3 + a_3 = b_3 \end{cases}$$

を満たす a_1, a_2, a_3 が存在する. 分かりづらいかもしいないが, 要する平面上に x 軸に平行にならない 3 点を与えたとき, その 3 点を通る 2 次関数 $f(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ が必ず存

在するということが当たり前の事実です．なお $b_1 = b_2 = b_3$ のとき $a_1 = a_2 = 0, a_3 = b_1$

もし b_1, b_2, b_3 に対して a_1, a_2, a_3 を求めるなら

$$(a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} = (b_1 \ b_2 \ b_3)$$

より行列の逆行列を右からかければよい．

なお，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$ が逆行列を持つことは

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

より分かる．

証明を続けよう．

$f(x)$ の最大偏差点が 3 個しかなかったとすると， $V_+(f)$ で負の値をとり， $V_-(f)$ で正の値をとる 2 次関数が存在するので命題 1 より矛盾である．

命題 3

$f(x), g(x)$ が n 次の最小偏差多項式であるとき， $h(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2}$ も n 次の最小偏差多項式である．

また， $h(x)$ の最大偏差点は $f(x), g(x)$ の最大偏差点でもあり．さらに $h(x)$ の正の最大偏差点は $f(x), g(x)$ の正の最大偏差点であり， $h(x)$ の負の最大偏差点は $f(x), g(x)$ の負の最大偏差点である．

証明

$f(x), g(x)$ の x^n の係数が 1．

$[a, b]$ における $f(x), g(x)$ の最大偏差を A とする．このとき

$$|h(x)| \leq \frac{|f(x)| + |g(x)|}{2} \leq A$$

が成り立つ．一方， $h(x)$ の最大偏差が A であるから

$$\max_{x \in [a, b]} |h(x)| < A \text{ とはならない．したがって，} \max_{x \in [a, b]} |h(x)| = A$$

よって， $h(x)$ は最小偏差多項式である．

また， x_0 が $h(x)$ の正の最大偏差点とすると，

$$A = h(x_0) = \frac{f(x_0) + g(x_0)}{2}$$

ここで, $f(x_0) \leq A, g(x_0) \leq A$ であるから

$$f(x_0) = g(x_0) = A$$

を得る. よって, x_0 は $f(x), g(x)$ の正の最大偏差点である. 負の最大偏差点についても同様.

定理 1

最小偏差多項式は存在するなら唯一つである. すなわち, f, g が区間 $[a, b]$ における 3 次の x^3 の係数 1 の最小偏差多項式とすると $f(x) = g(x)$ が成り立つ.

証明

$f(x), g(x)$ が共に 3 次の最小偏差多項式とする. このとき $F(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2}$ も命題 3 より最小偏差多項式であり, さらに命題 2 より $F(x)$ は少なくとも 4 個の最大偏差点をもち, その点は $f(x), g(x)$ の最大偏差点であり, 符号も一致する. したがって, $F(x)$ の最大偏差点を x_1, x_2, x_3, x_4 とすると,

$$f(x_1) = g(x_1), f(x_2) = g(x_2), f(x_3) = g(x_3), f(x_4) = g(x_4)$$

である. x^3 の係数が 1 であるから, $f(x) = g(x)$ を得る.

以上の議論は, 次数 3 で行っているが実際は一般の n 次の場合も成り立つ.

ここまでの内容から, x^3 の係数が 1 の 3 次多項式 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ について, $f(x)$ が区間 $[a, b]$ の最小偏差多項式とすると $f(x)$ は少なくとも 4 個の最大偏差点をもことが分かる.

さらに $f(x)$ は 3 次式であるから, 極値は多くても 2 個しかとらず, 一方最大偏差点は極値または端点でなければならないから, 最大偏差点は端点または極値を取る点であることが分かる. したがって, 最大偏差点を取る x の値を $(a =)x_1, x_2, x_3, x_4(= b)$ とすると, $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$ を満たす.

逆にこの性質をもてば最小偏差多項式である子を示す.

定理 2

閉区間 $[a, b]$ において, x^3 の係数が 1 の 3 次多項式 $f(x)$ が次の条件を満たせば最小偏差多項式である.

閉区間 $[a, b]$ に 4 個の点 x_1, x_2, x_3, x_4 がこの順にあり, 次の 3 条件を満たす.

$$\text{条件 1} \quad |f(x_i)| = A \quad (0 \leq i \leq n)$$

条件2 $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$

条件3 $a \leq x \leq b$ で $|f(x)| \leq A$ が成り立つ .

証明

$g(x)$ が x^3 の係数 1 の 3 次多項式で $[a, b]$ で $|g(x)| < A$ が成り立つと仮定する .

$f(x), g(x)$ は共に x^3 の係数 1 の 3 次式であるから , $f(x) - g(x)$ は 2 次以下である .

$f(x_i)$ は $\pm A$ の値を交互にとるから $f(x_i) - g(x_i)$ は正負の値を交互に取る . したがって , $f(x) - g(x) = 0$ は $[a, b]$ で 3 個の解を持つことになり , $f(x) - g(x)$ が 2 次式に反する .

注意

定理 2 では x^3 の係数 1 んば 3 次式としたが , 証明から分かるようにすなわち $f(x) - g(x)$ が 2 次以下であればよいから , 最高次の係数が一定であれば成り立つ .

ここまで , 最小偏差多項式の存在の一意性は示したが , まだその存在は示されていない . 定理 2 を利用して , 最小偏差多項式を具体的に構成しよう . ここで , 本稿の導入で述べたように三角関数の性質を利用する .

まず , 閉区間 $[-1, 1]$ で考える .

$\cos 3\theta$ を $\cos \theta$ で表すと $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

より

$$f(x) = 4x^3 - 3x$$

とおくと

$$\cos 3\theta = f(\cos \theta)$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で

$\cos 3\theta = \pm 1$ を解くと

$$\theta = \frac{i\pi}{3} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

を得る .

ここで ,

$$x_0 = 0, x_1 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, x_3 = -1$$

とおけば

$$f(1) = 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = -1, f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1, f(-1) = -1$$

となり , $f(x) = 4x^3 - 3x$ が閉区間 $[-1, 1]$ における x^3 の係数 4 の最小偏差多項式である . この多項式は閉区間 $[-1, 1]$ における最大偏差が 1 の 3 次の最小偏差多項式であると

いうこともできる .

このように , x の閉区間と次数を与えたとき , 最高次の係数を与えても最小偏差多項式は決まるし最大偏差を与えても最小偏差多項式はきまる .

当然 , 閉区間 $[-1, 1]$ における , x^3 の係数 1 の 3 次の最小偏差多項式は , y 軸方向に $\frac{1}{4}$ 倍した

$$f(x) = x^3 - \frac{3x}{4}$$

であり , 最大偏差は $\frac{1}{4}$ である .

定義

$\cos n\theta$ は $\cos \theta$ の n 次式で表すことができる . この n 次の多項式を n 次のチェビシェフ多項式という .

ここでは , n 次のチェビシェフ多項式を $f_n(x)$ と表す .

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

より

$$f_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$f_3(x) = 4x^3 - 3x$$

4 次以上のチェビシェフ多項式は次の漸化式を利用する .

$$\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2 \cos(n+1)\theta \cos \theta$$

より $\cos n\theta = f_n(\cos \theta)$ とおくと

$$f_{n+2}(\cos \theta) + f_n(\cos \theta) = 2f_{n+1}(\cos \theta) \cos \theta$$

$\cos \theta$ を x とおくと

$$f_{n+2}(x) = 2xf_{n+1}(x) - f_n(x)$$

ここで ,

$$f_1(x) = x, f_2(x) = 2x^2 - 1, f_3(x) = 4x^3 - 3x$$

であるので , 漸化式より順に求めると

$$f_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$f_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

チェビシェフ多項式の係数で漸化式より分かることをまとめると次のようになる .

命題 4

(1) $f_n(x)$ の最高次 x^n の係数は 2^{n-1}

(2) $f_{2n}(x)$ は偶数次の項だけ , $f_{2n+1}(x)$ は奇数次の項だけである .

(3) $f_{2n}(x)$ の定数項は $(-1)^n$

(4) $f_{2n+1}(x)$ の 1 次の項の係数は $(-1)^n(2n+1)$

証明

漸化式

$$\therefore f_{n+2}(x) = 2xf_{n+1}(x) - f_n(x)$$

を利用する .

(1) $f_n(x)$ の最高次 x^n の係数は $f_{n-1}(x)$ の最高次 x^{n-1} の係数の 2 倍であり ,
 $f_1(x) = x$ であるから , $f_n(x)$ の最高次 x^n の係数は 2^{n-1} である .

(2) 数学的帰納法で示す .

n が偶数のとき , $f_n(x)$ 偶数次の項だけ , f_{n+1} は奇数次の項だけよりなるとする .

このとき

$$f_{n+2}(x) = 2xf_{n+1}(x) - f_n(x)$$

より , f_{n+2} は偶数次の項だけの関数である .

n が奇数の時も同様 .

(3) $f_{2n+2}(x) = 2xf_{2n+1}(x) - f_{2n}(x)$ および $f_2(x) = 2x^2 - 1$ より $f_{2n}(x)$ の定数項
は $(-1)^n$ が成り立つ .

(4) 数学的帰納法で示す .

$$f_{2n+1}(x) = 2xf_{2n}(x) - f_{2n-1}(x)$$

(3) および帰納法の仮定より

(f_{2n+1} の 1 次の項の係数) = 2 (f_{2n} の定数項) - (f_{2n-1} の 1 次の項の係数) によ
て , 帰納法の仮定より

$$(f_{2n+1}(x) \text{ の 1 次の項 }) = 2(-1)^n x - (-1)^{n-1}(2n-1)x = (-1)^n(2n+1)x$$

このようにチェビシエフ多項式の係数は漸化式

$$f_{2n+2}(x) = 2xf_{2n+1}(x) - f_{2n}(x)$$

を利用して , 低次より順に求めることができる .

次に $\sin n\theta$ についても同様の議論をしてみよう .

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = \sin \theta(4 \cos^2 \theta - 1)$$

したがって , $1 \leq n \leq 3$ のとき

$$\sin n\theta = \sin \theta(\cos \theta \text{ の } n-1 \text{ 次式})$$

となる . さらに ,

$$\sin(n+2)\theta = \sin n\theta + 2\cos(n+1)\theta \sin \theta$$

$$= \sin \theta (\cos \theta \text{ の } n+1 \text{ 次式})$$

$$\therefore \sin n\theta = \sin \theta (\cos \theta \text{ の } n-1 \text{ 次式})$$

この $n-1$ 次式を g_n で表す . すなわち

$$\sin n\theta = \sin \theta g_n(\cos \theta)$$

$g_n(x)$ の性質および $g_n(x)$ と $f_n(x)$ の関係式を調べる .

$$\sin(n+2)\theta + \sin n\theta = 2\sin(n+1)\theta \cos \theta$$

より

$$\sin \theta g_{n+2}(\cos \theta) + \sin \theta g_n(\cos \theta) = 2\sin \theta \cos \theta g_{n+1}(\cos \theta)$$

$$\therefore g_{n+2}(x) + g_n(x) = 2xg_{n+1}(x)$$

この漸化式より $g_n(x)$ を具体的にもとめと ,

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = 2x$$

$$g_3(x) = 4x^2 - 1$$

$$g_4(x) = 8x^3 - 4x$$

$$g_5(x) = 16x^4 - 12x^3 + 1$$

次に , $f_n(x)$ と $g_n(x)$ の関係を調べよう .

$$\cos n\theta = f_n(\cos \theta) \text{ の両辺を } \theta \text{ で微分すると } -n \sin n\theta = f'_n(\cos \theta)(-\sin \theta)$$

一方

$$\sin n\theta = \sin \theta g_n(\cos \theta)$$

$$\therefore f'_n(x) = ng_n(x)$$

今までは , チェビシエフ多項式の一般的性質を扱ってきたが , これから具体的な問題を考えよう .

まず , 閉区間 $[a, b]$ における最小偏差多項式を求めよう .

閉区間 $[-1, 1]$ 最大偏差 1 の最小偏差多項式は , チェビシエフ多項式で与えられるから , それを利用しよう .

$$h(a) = -1, h(b) = 1$$

を満たす 1 次式 $h(x)$ すなわち

$$h(x) = \frac{2(x-a)}{b-a} - 1$$

を用いて $f_n \circ h(x)$ を考えれば, $[a, b]$ における最大偏差 1 の最小偏差多項式を得る.

例 1 $[0, 1]$ における最大偏差 1 の最小偏差多項式

$$a = 0, b = 1 \text{ より } h(x) = 2x - 1$$

$$f_1(2x - 1) = 2x - 1$$

$$f_2(2x - 1) = 8x^2 - 8x + 1$$

$$f_3(2x - 1) = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1$$

$$f_4(2x - 1) = 128x^4 - 256x^3 + 160x^2 - 32x + 1$$

例 2

$[0, 2]$ における最大偏差 1 の最小偏差多項式

$$a = 0, b = 2 \text{ より } h(x) = x - 1$$

$$f_1(x - 1) = x - 1$$

$$f_2(x - 1) = 2x^2 - 4x + 1$$

$$f_3(x - 1) = 4x^3 - 12x^2 + 9x - 1$$

$$f_4(x - 1) = 8x^4 - 32x^3 + 40x^2 - 16x + 1$$

ここまで, チェビシエフ多項式を利用して最小偏差多項式を求めてきたが, 次に直接最小偏差多項式を求めよう.

直接求めるとき次の命題が効果的である.

命題 5

$$F_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

と, $F_n(x)$ の項を 1 つおきに除いていった

$$G_n(x) = x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-4}x^{n-4} + \cdots$$

を考える. このとき, 閉区間 $[-\alpha, \alpha]$ における $G_n(x)$ の最大偏差は $F_n(x)$ の最大偏差と等しいか小さい. すなわち

$$\max_{x \in [-\alpha, \alpha]} |F_n(x)| \geq \max_{x \in [-\alpha, \alpha]} |G_n(x)|$$

が成り立つ.

証明

$$\max_{x \in [-\alpha, \alpha]} |F_n(x)| = A$$

とおく.

n が偶数のとき

$G_n(x) = \frac{F_n(x) + F_n(-x)}{2}$ であるから, $[-\alpha, \alpha]$ の任意の点 x_0 について

$$G_n(x_0) \leq \frac{|F_n(x_0)| + |F_n(-x_0)|}{2} \leq A$$

n が奇数のとき

$G_n(x) = \frac{F_n(x) - F_n(-x)}{2}$ であるから

$[-\alpha, \alpha]$ の任意の点 x_0 について

$$G_n(x_0) \leq \frac{|F_n(x_0)| + |F_n(-x_0)|}{2} \leq A$$

注意

$f(x)$ に対して $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$ は常に偶関数で, $\frac{f(x) - f(-x)}{2}$ は常に奇関数である.

双曲線関数 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ は e^x より偶関数, 奇関数を作ったものである.

命題 5 より, $[-\alpha, \alpha]$ における; 最小偏差多項式は $F_n(x) = x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-4}x^{n-4} + \dots$ だけを考えればよい.

なお, 以下扱う例題 1 から例題 4 までの最小偏差多項式は最高次の係数が 1 のものである.

例題 1

$[-1, 1]$ における 2 次の最小偏差多項式を求めよ.

解答

$f(x) = x^2 - a$ より見つければよい. ($f(x)$ の最大値) + ($f(x)$ の最小値) = 0 より

$$f(0) + f(1) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

例題 2

$[0, 1]$ における 2 次の最小偏差多項式を求めよ.

解答

$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ における最小偏差多項式を求め, それを x 軸の方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動すればよい.

$f(x) = x^2 - a$ とおき ,
 $f(0) + f(\frac{1}{2}) = 0$ より $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}$
 \therefore (求める式) $= (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8} = x^2 - x + \frac{1}{8}$

例題 3

$[-1, 1]$ における 4 次の最小偏差多項式を求めよ .

解答

命題 5 より ,

$$f(x) = x^4 + ax^2 + b$$

より見つければよい . $t = x^2$ とおけば

$$f(x) = t^2 + at + b = g(t) \quad [0, 1]$$

したがって , $g(t)$ は $[0, 1]$ における 2 次の最小偏差多項式 . 例題 2 より $a = -1, b = \frac{1}{8}$

$$\therefore f(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$$

例題 4

$[-1, 1]$ における 3 次の最小偏差多項式を求めよ .

解答

命題 5 より

$$f(x) = x^3 + ax \text{ より見つければよい .}$$

(1) $0 \leq a$ のとき

$f(x)$ は単調増加より

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x)| = f(1) = a + 1 \geq 1$$

よって , この場合最大偏差を最小にするのは $a = 0$ のときで , そのときの最大偏差は 1 である .

(2) $a < 0$ のとき

$$f(x) = x^3 - 3a^2x \quad (a > 0) \text{ として考える .}$$

$$f'(x) = 3(x + a)(x - a) \text{ であるから ,}$$

$0 < a \leq 1$ のとき

増減表は

x	-1	...	-a	...	a	...	1
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	$3a^2 - 1$	\nearrow	$2a^2$	\searrow	$-2a^2$	\nearrow	$1 - 3a^2$

$$\begin{aligned} \max_{x \in [-1,1]} |f(x)| &= \max(f(a), f(1)) = \max(2a^3, |1 - 3a^2|) \\ &= \begin{cases} \max(2a^3, 1 - 3a^2) & (0 < a \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき}) \\ \max(2a^3, 3a^2 - 1) & (\frac{1}{\sqrt{3}} \leq a \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

ここで

$$2a^3 - (1 - 3a^2) = (a + 1)^2(2a - 1)$$

$$2a^3 - (3a^2 - 1) = (a - 1)^2(2a + 1)$$

より

$$= \begin{cases} 2a^3 & (\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき}) \\ 1 - 3a^2 & (0 < a \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ 2a^3 & (\frac{1}{\sqrt{3}} \leq a \leq 1) \end{cases}$$

したがって $0 < a \leq 1$ の範囲では $a = \frac{1}{2}$ のとき $\max |f(x)|$ は最小となりその値は $\frac{1}{4}$ である。

$1 \leq a$ のとき

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x)| = |f(1)| = 3a^2 - 1 \geq 2$$

以上より，求める最小偏差多項式は

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$$

である。

最後にチェビシエフ多項式と一般の多項式との関係を調べよう。

命題 6

$h(x)$ を n 次のチェビシエフ多項式とする。このとき，任意の n 次の多項式 $f(x)$ が開区間 $(-1, 1)$ で

$$-1 < f(x) < 1$$

をみたすとき $|x| > 1$ において

$$|f(x)| < |h(x)|$$

が成り立つ。

証明

$h(x)$ が n 次のチェビシエフ多項式であるから $n+1$ 個の点 $x_0 = -1, x_1, x_2, \dots, x_n = 1$ が存在して

$$|h(x_i)| = 1, h(x_i)h(x_{i+1}) < 0$$

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ で } |h(x)| \leq 1$$

が成り立つ .

一方 , $-1 < x < 1$ で $-1 < f(x) < 1$ であるから

$$-1 \leq f(-1), f(1) \leq 1$$

ここで , $F(x) = h(x) - f(x), G(x) = h(x) + f(x)$ とおく .

(1) n が偶数のとき .

$$h(x_0) = h(-1) = 1, h(x_n) = h(1) = 1$$

より ,

$$F(x_0) = h(x_0) - f(x_0) \geq 0$$

$$F(x_1) < 0, F(x_2) > 0, \dots, F(x_{n-1}) < 0$$

$$F(x_n) = h(x_n) - f(x_n) \geq 0$$

さらに , $F(x)$ は高々 n 個の解しか持たないからその解を t_1, t_2, \dots, t_n とすると

$$-1 = x_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq x_n = 1$$

となり , $|x| > 1$ には $F(x) = 0$ の解は存在しない . したがって , $1 < x$ 及び $x < -1$ では $F(x)$ は定符号である .

$x > 1$ における $F(x)$ の符号は $F(x_{n-1})$ の符号と反対であるから $x > 1$ で $F(x) > 0$

$$\therefore h(x) > f(x) \quad (x > 1)$$

同様に , $x < -1$ で $h(x) > f(x)$ が成り立つ .

次に $G(x) = h(x) + f(x)$ について同様の議論をする .

$$G(x_0) \geq 0, G(x_1) < 0, \dots, G(x_{n-1}) < 0, G(x_n) \geq 0$$

よって $x > 1$ で $G(x) = h(x) + f(x) > 0, x < -1$ で $G(x) = h(x) + f(x) > 0$

以上より , $x > 1$ で $h(x) > f(x), h(x) > -f(x)$

$$\therefore |f(x)| < h(x) \leq |h(x)| \quad (1 < x)$$

同様に

$$|f(x)| < |h(x)| \quad (x < -1)$$

が成り立つ .

(2) n が奇数のときは

$1 < x$ のとき

$$f(x) < h(x), -f(x) < h(x)$$

$$\therefore |f(x)| < h(x) < |h(x)|$$

$x < -1$ のとき

$$h(x) < f(x), h(x) < -f(x)$$

より

$$h(x) < -|f(x)|$$

$$\therefore |f(x)| < |h(x)|$$

微分したときの関係式は次の命題である .

命題 7

$h(x)$ を n 次のチェビシエフ多項式とする . このとき , 任意の n 次の多項式 $f(x)$ が区間 $(-1, 1)$ で

$$-1 < f(x) < 1$$

をみたすとき $|x| \geq 1$ において

$$|f'(x)| < |h'(x)|$$

が成り立つ .

証明

n を偶奇に分けて証明する .

(1) n が偶数のとき .

$F(x) = h(x) - f(x), G(x) = h(x) + f(x)$ とおく . 上の命題 6 で示したとおり $F(x) = 0, G(x) = 0$ の n 個の解はすべて異なり解はすべて $|x| \leq 1$ の範囲にある . したがって , 平均値の定理より $F'(x) = 0, G'(x) = 0$ の解は $|x| < 1$ にある . よって , $F'(x), G'(x)$ は $1 \leq x, x \leq -1$ においては定符号である . ここで , $F(x) = 0, F'(x) = 0$ の解をそれぞれ

$$t_1, t_2, \dots, t_n, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$$

とすると ,

$$-1 \leq t_1 < s_1 < \dots < s_{n-1} < t_n \leq 1$$

である .

$$F(t_{n-1}) = 0, F(s_{n-1}) < 0, F(t_n) = 0$$

であり , $F'(s_{n-1}) = 0$ であるから , $x > s_{n-1}$ において $F'(x) > 0$

$$\therefore h'(x) > f'(x) \quad (1 \leq x)$$

次に ,

$$F(t_1) = 0, F(s_1) < 0, F(t_2) = 0, F'(s_1) = 0 \text{ であるから } x \leq s_1 \text{ において } F'(x) < 0$$

$$\therefore F'(x) < 0 \quad (x \leq -1)$$

$$\therefore h'(x) < f'(x) \quad (x \leq -1)$$

同様に $G'(x) > 0 \quad (x \geq 1)$

$$\therefore h'(x) > -f'(x) \quad (1 \leq x)$$

$$G'(x) < 0 \quad (x \leq -1)$$

$$\therefore h'(x) < -f'(x) \quad (x \leq -1)$$

$$1 \leq x \text{ で } f'(x) < h'(x), -f'(x) < h'(x)$$

より

$$|f'(x)| < h'(x) < |h'(x)|$$

$$x \leq -1 \text{ で } h'(x) < f'(x), h'(x) < -f'(x)$$

より

$$h'(x) < -|f'(x)|$$

$$\therefore |h'(x)| > |f'(x)| \quad (x \leq -1)$$

したがって

$$|f'(x)| < |h'(x)| \quad (|x| \geq 1)$$

n が奇数のときも同様である .

(チェビシェフ多項式の項目終わり)