

磨光法とその応用

奇妙な名前です。少しずつ磨いていって、目標の形にするという解法です。

磨光法を説明するために、 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ のとき 算術平均 $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$,

幾何平均 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ の関係

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを磨光法で証明しましょう。なお、これから述べる証明は一般的な方法ではありません。①の証明はいろいろあります。それは算術-幾何平均不等式のいろいろな証明のファイルにのせてあります。そちらを参考にしてください。

まず、3変数の場合に証明しましょう。

定理1 $x, y, z > 0$ のとき $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq x y z$ が成り立つ。

証明の基本になることは次の性質です。

性質 $x \leq y$ のとき、 m が $x \leq m \leq y$ を満たすなら

$$x y \leq m (x + y - m) \quad \dots \textcircled{2}$$

がなりたつ。等号が成り立つのは $m = x$ または $m = y$ のとき。

意味は、 $x + y = (\text{一定})$ のとき、 $x y$ の値は $|x - y|$ が小さいほど大きいという意味です。証明は簡単です。

証明1 (左辺) - (右辺) = $m^2 - m(x + y) + x y$
 $= (m - x)(m - y) \leq 0$
 等号が成り立つのは $x = y$ のとき

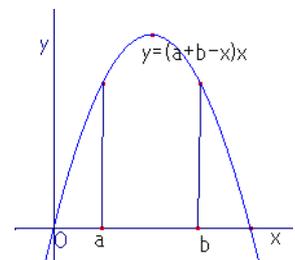
性質の証明は、次のように関数として扱ったほうが分かりやすいかもしれません。

証明2 $a < x < b$ で $f(x) = (a + b - x)x$ とおく。このとき $y = f(x)$ は

$x = \frac{a+b}{2}$ に関して対称であるから、グラフを考えることにより明らかに

$a < m < b$ なら

$$f(m) > f(a) = f(b) = a b$$



定理1の証明

$x \leq y \leq z$ として証明します。 $\frac{x+y+z}{3} = a$ とおく。このとき、 $x \leq a \leq z$ であるから

$$x z \leq a (x + z - a) \quad \dots \textcircled{1}$$

したがって、 $x y z \leq a y (x + z - a)$.

言い方を換えれば

$$(x, y, z) \rightarrow (a, y, x+z-a)$$

の変換によって、3数の積は増加するということです。

さらに同じ変換

$$(a, y, x+z-a) \rightarrow (a, a, a) \quad \dots \textcircled{2}$$

によっても、3数の積は増加する。一方 $\frac{x+y+z}{3} = a$ であるから

$$x y z \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \quad \text{が成り立つ。}$$

等号が成り立つ場合も考えましょう。

等号が成り立つのは、①、②で等号が成り立つときです。

①で等号が成り立つのは $x = a$ または $y = a$ のとき。

次に②で等号が成り立つのは $y = a$ または $x+z-a = a$ ただし $a = \frac{x+y+z}{3}$ のとき

よって、①、②がともに成り立つのは $x = y = z$ のときです。

一般の場合の証明をしましょう。

定理 2

$x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ のとき 算術平均 $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$, 幾何平均

$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ には

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad \dots \textcircled{1}$$

の関係がある。

証明 x_i を小さい順に並べ $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ とします。

$a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ とおけば、 $x_1 \leq a \leq x_n$ であるから、2数だけ変換する

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (a, x_2, \dots, x_{n-1}, x_1 + x_n - a)$$

を考えると、この変換で、 n 個の数の積は増加する。次に、 a を除いた残りの $n-1$ 個の数に同じ変換をし、 a を2個に換える。このときも n 個の数の積は増加する。この変換を (a, a, \dots, a) まで続ける。これは少なくとも $n-1$ の変換をすれば得られる。したがって、

$$x_1 x_2 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^n$$

等号が成り立つのは、すべての不等式で等号が成り立つときであるから $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

磨光法を説明しましょう。おおよそ次の段取りの証明方法です。

- (1) 観察と分析により最大値，最小値を与える $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ を推測する。
- (2) 2つの適当な変数を選び，そのほかの変数は動かさない。与えられた条件のもとで変数を変換し，変換後の新しい変数の一つが最大値，最小値を与える変数の場合になっている。
- (3) 上述の変換の検証のもと関数のとる値の変化の方向が問題の要求の方向と一致している。
- (4) 多くとも $n-1$ 回のこのような変換で最大値，最小値を与える点に到達する。これによって全ての証明が終了する。

もし変数の取る値が互いに等しくないすなわちでこぼこに見えるとき，全ての値を等しくすなわち平らにすれば，磨き上げたように見える。問題を解く過程でこのでこぼこの状況を順次滑らかにして光らせるという意味でこの方法を**磨光法**といい，解く上で用いたこの変換を**磨光変換**といいます。なお，磨光法で解くとき，(1)の予想する値はおおむね同じ値です。

なお，「垂足三角形とその周辺の話題」に，周の長さの和が一定のとき面積が最大になる三角形は正三角形であることを磨光法で証明してあります。それも参考にしてください。

具体的問題に入りましょう。

例1 A, B, Cを三角形の内角とする。このとき $\sin A + \sin B + \sin C$ の最大値を求めよ。

証明 三角関数の公式より

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

この式は，Cを固定(A+Bを固定)の条件下， $A=B$ のとき $\sin A + \sin B + \sin C$ は最大値を取ることを表している。したがって $A=B=C$ のとき最大値を取ることが予想できる。

対称性より $A \leq B \leq C$ としよ。もしA, B, Cの全が等しいわけではない，すなわち $A <$

$\frac{\pi}{3} < C$ のとき，

$$A' = \frac{\pi}{3}, B' = B, C' = A + C - \frac{\pi}{3}$$

とおく。このとき

$$|A' - C'| < |A - C|$$

であるから

$$\begin{aligned} \sin A + \sin C &= 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} \\ &< 2 \sin \frac{A'+C'}{2} \cos \frac{A'-C'}{2} = \sin A' + \sin C' \end{aligned}$$

もし $C' \neq \frac{\pi}{3}$ のとき, $B' + C' = \frac{2\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &< \sin A' + \sin B' + \sin C' \\ &= \sin \frac{\pi}{3} + 2 \sin \frac{B' + C'}{2} \cos \frac{B' - C'}{2} \\ &< 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$A = B = C$ のとき $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ である.

以上で $\sin A + \sin B + \sin C$ の最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ で等号が成り立つのは $A = B = C$ の時であることの

証明が終了した.

なお, $R > 0$ を定数とし, $2R \sin A + 2R \sin B + 2R \sin C$ とすれば, 半径 R の円に内接する三角形の周の長さです. したがって, 円が与えられたとき, その円に内接する三角形で周の長さの最大値を求めよという問題と同じです

例2 x, y, z は負でない実数で $x + y + z = 1$ とする. このとき次の式が成り立つことを証明せよ.

$$yz + zx + xy - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

(1984年IMO第1問)

証明 $x = y = z = \frac{1}{3}$ のとき, 与えられた不等式で等号が成り立つことは容易に予想できる.

対称性より $x \geq y \geq z$ としてよく, したがって $x \geq \frac{1}{3} \geq z$ と仮定してよい. ここで

$$x' = \frac{1}{3}, \quad y' = y, \quad z' = x + z - \frac{1}{3}$$

とおく. このとき

$$x' + z' = x + z, \quad x' \cdot z' \geq x \cdot z$$

であるから

$$\begin{aligned} yz + zx + xy - 2xyz &= y(x + z) + (1 - 2y)xz \\ &\leq y'(x' + z') + (1 - 2y')x'z' \\ (\because y > \frac{1}{2} \text{ とすると } x + y > 1 \text{ となるから } y &\leq \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y' z' + z' x' + x' y' - 2 x' y' z' \\
&= \frac{1}{3} (y' + z') + \frac{1}{3} y' z'
\end{aligned}$$

ここで $y'' = z'' = \frac{1}{3}$ と変換すれば

$$\leq \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

を得る.

以上の例を関数の観点から見直すと,

例 1 は関数 $f(A+B+C) = \sin A + \sin B + \sin C$

の $A+B+C = \pi$ の条件下での最大値を求める,

例 2 は関数 $f(x+y+z) = yz + zx + xy - 2xyz$

の $x+y+z = 1$ の条件下での最大値を求める.

である. すなわち, この 2 題はある条件下での最大値, 最小値を求める問題であり, さらに全ての変数が同じ値の時最大値, 最小値を取っている.

さて, すべての変数が同じ値のとき最大値, 最小値をとるわけではありません. その例を 1 つ挙げましょう.

例 3 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ は $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \geq 0$ かつ $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = \pi$ を満たすとす. このとき $\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 + \dots + \sin^2 \theta_n$ の最大値を求めよ.

まず, $n=2, n=3, n=4$ のとき θ_i が等しいときの

$$A = \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 + \dots + \sin^2 \theta_n$$

の値を求めましょう.

$$n=2 \text{ のとき } \theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ で } A = 2$$

$$n=3 \text{ のとき } \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{3} \text{ で } A = \frac{9}{4}$$

$$n=4 \text{ のとき } \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \frac{\pi}{4} \text{ で } A = 2 \text{ となり}$$

すくなくとも, $n=4$ のとき $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \frac{\pi}{4}$ では最大値をとりません. なぜなら

$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{3}$, $\theta_4 = 0$ のとき $A = \frac{9}{4}$ となるからです.

以上のことを理解してから次の解答を読みましょう.

解答

まず $\theta_1 + \theta_2$ が一定の時を考えます. このとき

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 &= (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)^2 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ &= 4 \sin^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cos^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} - \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ &= 2 \cos^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \left(2 \sin^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - 1 \right) + 1 + \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (1)$$

(1) 式で $\theta_1 + \theta_2$ が一定でありかつ

$$\begin{aligned} &< 0 && \left(\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2} \right) \\ 2 \sin^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - 1 &= 0 && \left(\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \right) \quad \dots \dots \dots (2) \\ &> 0 && \left(\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

ですから (2) より (1) の値について次のことが分かります.

$\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ のとき θ_1, θ_2 のいずれかが 0 なら (1) は最大値をとり,

$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ のとき θ_1, θ_2 の値にかかわらず (1) は一定であり,

$\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$ のとき $|\theta_1 - \theta_2|$ が小さいほど (1) の値は大きい.

$n \geq 4$ のとき, 和が $\frac{\pi}{2}$ 以下の 2 角が必ず存在するので, 片方を 0, もう一方を 2 角の和とすれば

正弦の平方の和は減ることはありません. このような変数の変換を行えば n 個の正弦の平方の和の問題は 3 角の平方の和の問題に帰着されます.

$n = 3$ のとき, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ のうち 2 つが $\frac{\pi}{2}$ に等しいならもう 1 つは 0 です. このときは 3 角を $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ にかえます.

そうするとすべての場合が次の方法で処理できます.

$\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3, \theta_1 < \theta_3$, すなわち $\theta_1 + \theta_3 > \frac{\pi}{2}, \theta_1 < \frac{\pi}{3} < \theta_3$ としてかまいません.

ここで,

$$\theta_1' = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_2' = \theta_2, \quad \theta_3' = \theta_1 + \theta_2 - \frac{\pi}{3}$$

とおく. このとき

$$\theta_1' + \theta_3' = \theta_1 + \theta_3, \quad |\theta_1' - \theta_3'| < |\theta_1 - \theta_3|$$

ですから (1), (2) より

$$\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_3 < \sin^2 \theta_1' + \sin^2 \theta_2' + \sin^2 \theta_3' . \quad (3)$$

さらに

$$\theta_2' + \theta_3' = \frac{2\pi}{3} \text{ ですから (1), (2) より}$$

$$\sin^2 \theta_2' + \sin^2 \theta_3' \leq 2 \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} \quad (4)$$

(3), (4) より

$$\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_3 \leq \frac{9}{4}$$

また, この式で等号が成り立つのは $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{3}$ の時に限る.

このことは $n \geq 3$ のとき, 求める最大値は $\frac{9}{4}$ であることを表している.

また, $n = 2$ のとき $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ であるから

$$\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 = 2 \sin^2 \theta_1 \leq 2$$

ここで等号が成り立つのは $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ の時に限る. したがってこのときの求める最大値は 2 です.

この問題で, $n \geq 4$ のとき目標の値は同じではありません. それは 4 つ以上の角を扱うのに和が π は不自然だからでしょう. この問題も本質的には $n = 3$ の場合で, そのときは, 最大値をとるのはすべてが同じ角のときです.

磨光法とその応用終わり)