

順序の原理

$a \leq b, x \leq y$ のとき

$$a y + b x \leq a x + b y \quad (\because (a - b)(x - y) \geq 0)$$

が成り立ちます. これを n 変数に拡張したのが次の定理です.

定理

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ とする.

ここで (j_1, j_2, \dots, j_n) を $(1, 2, \dots, n)$ の一つの順列とする.

このとき

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\leq a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ.

小さい順に順序付けられた数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して,
和①を逆順の積の和, ②を乱順の積の和, ③を同順の積の和といい, 上の定理を順序の原理, 上の不等式を順序不等式といいます.

証明 1 (後半の不等式)

$a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n}$ について $j_1 = h, j_k = 1$ とする. このとき

$$a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_k b_{j_k} + \dots + a_n b_{j_n}$$

$$= a_1 b_h + a_2 b_{j_2} + \dots + a_k b_1 + \dots + a_n b_{j_n} \quad \dots \textcircled{1}$$

①で b_h と b_1 を交換し他は変えない

$$a_1 b_1 + a_2 b_{j_2} + \dots + a_k b_h + \dots + a_n b_{j_n} \quad \dots \textcircled{2}$$

を考えると $a_1 \leq a_k, b_1 \leq b_h$ より

$$a_1 b_h + a_k b_1 \leq a_1 b_1 + a_k b_h$$

したがって, (①の和) \leq (②の和)

さらに初項は $a_1 b_1$ である. この操作を第 2 項, 第 3 項と繰り返せば (1) が証明される.

(前半の不等式)

同様であるが証明する.

$a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n}$ について $j_1 = h, j_k = n$ とする. このとき

$$a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_k b_{j_k} + \dots + a_n b_{j_n}$$

$$= a_1 b_h + a_2 b_{j_2} + \dots + a_k b_n + \dots + a_n b_{j_n} \quad \dots \textcircled{3}$$

①で b_h と b_n を交換し他は変えない

$$a_1 b_n + a_2 b_{j_2} + \dots + a_k b_h + \dots + a_n b_{j_n} \quad \dots \textcircled{4}$$

を考えると $a_1 \leq a_k, b_h \leq b_n$ より

$$a_1 b_n + a_k b_h \leq a_1 b_h + a_k b_n$$

したがって、(④の和) \leq (③の和)

さらに初項は $a_1 b_n$ である.

次に $a_2 \leq \dots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1}$

で同じ操作を行い、この操作を繰り返せば(2)が証明される.

少し難しいが数学的帰納法を用いると次のようになる.

証明2 $n \leq k$ のとき①が成り立つと仮定する.

$$I = a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_{k+1} b_{j_{k+1}}$$

とおく.

(後半の不等式) $j_1 = k + 1$ のとき $a_1 \leq a_2$, $b_{j_2} \leq b_{j_1}$ および帰納法の仮定より

$$a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} \leq a_1 b_{j_2} + a_2 b_{j_1}$$

したがって、 $j_1 \neq k + 1$ と仮定してよい.

$j_1 = k + 1$, $2 \leq l \leq k + 1$ とする. 帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} I &= a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_{l-1} b_{j_{l-1}} + a_{l+1} b_{j_{l+1}} + \dots + a_{k+1} b_{j_{k+1}} + a_l b_{k+1} \\ &\leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{l-1} b_{l-1} + a_{l+1} b_l + \dots + a_{k+1} b_k + a_l b_{k+1} \end{aligned}$$

さらに帰納法の仮定をより

$$\begin{aligned} a_{l+1} b_l + \dots + a_{k+1} b_k + a_l b_{k+1} \\ \leq a_l b_1 + a_{l+1} b_{l+1} + \dots + a_{k+1} b_{k+1} \end{aligned}$$

ゆえに $I \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_{k+1} b_{k+1}$

したがって①が成り立つ.

(前半の不等式) $j_1 = 1$ のとき $a_1 \leq a_2$, $b_{j_1} \leq b_{j_2}$ および帰納法の仮定より

$$a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} \geq a_1 b_{j_2} + a_2 b_{j_1}$$

したがって、 $j_1 \neq 1$ と仮定してよい.

$j_m = 1$, $2 \leq m \leq k + 1$ とする. 帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} I &= a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_{m-1} b_{j_{m-1}} + a_{m+1} b_{j_{m+1}} + \dots + a_{k+1} b_{j_{k+1}} + a_m b_1 \\ &\geq (a_1 b_{k+1} + a_2 b_k + \dots + a_{m-1} b_{k+3-m}) + (a_{m+1} b_{k+2-m} + \dots + a_{k+1} b_2 + a_m b_1) \end{aligned}$$

後半の括弧の中は、帰納法の仮定をより

$$\begin{aligned} (a_{m+1} b_{k+2-m} + \dots + a_{k+1} b_2 + a_m b_1) \\ \geq a_m b_{k+2-m} + a_{m+1} b_{k+1-m} + \dots + a_{k+1} b_1 \end{aligned}$$

ゆえに $I \geq a_1 b_{k+1} + a_2 b_k + \dots + a_{k+1} b_1$

が証明された. したがって②が成り立つ.

さらに次の不等式が成り立つ.

定理 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ のとき

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

である.

この不等式をチェビシエフの不等式という.

証明 $\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j$ であり, 右辺を n 個ずつに分ける. たとえば

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_i b_j &= (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n) \quad (\text{b の添字}) = (\text{a の添字}) \\ &+ (a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_n b_1) \quad (\text{b の添字}) = (\text{a の添字}) + 1 \\ &+ (a_1 b_3 + a_2 b_4 + \cdots + a_n b_2) \quad (\text{b の添字}) = (\text{a の添字}) + 2 \\ &\cdots \cdots \\ &+ (a_1 b_n + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_{n-1}) \quad (\text{b の添字}) = (\text{a の添字}) + n - 1 \end{aligned}$$

それぞれと $\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i}$, $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ の大小を考えれば定理が成り立つことが分かる.

次のように直接証明することもできる.

証明

$$\begin{aligned} S &= n \sum_{i=1}^n a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_i - \sum_{i,j=1}^n a_i b_j = \sum_{i,j=1}^n a_i (b_i - b_j) \end{aligned}$$

であり, さらに

$$S = \sum_{i,j=1}^n a_j b_j - \sum_{i,j=1}^n a_j b_i = \sum_{i,j=1}^n a_j (b_j - b_i)$$

であるから

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (a_i - a_j) (b_i - b_j) \quad (2)$$

仮定より

$$(a_i - a_j) (b_i - b_j) \geq 0. \quad \text{したがって } S \geq 0.$$

順序の原理がどのように利用されるか2つ例を挙げましょう.

例1 x, y, z の正の数するとき

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \geq 3$$

が成り立つ.

解 $x \leq y \leq z$ とすると $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$

したがって (乱順の積の和) \geq (逆順の積の和)

であるから

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \geq \frac{x}{x} + \frac{y}{y} + \frac{z}{z} = 3$$

注意 これは相加相乗平均を利用するのが一般的です.

例2 a, b, c は正の数. このとき

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

が成り立つ.

証明 $a \leq b \leq c$ としても一般性を失わない.

このとき $a + b \leq a + c \leq b + c$ より

$$\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}$$

したがって, 順序の原理より

$$\frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \quad \dots \textcircled{2}$$

①+②より

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

を得る.

例3 a_1, a_2, \dots, a_n は互いに異なる自然数である. このとき, 次の不等式が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{i}$$

証明 j_1, j_2, \dots, j_n を

$$a_{j_1} < a_{j_2} < \dots < a_{j_n}$$

を満たす, $1, 2, \dots, n$ の順列とする.

a_i^2 の大小と $\frac{1}{a_i}$ の大小は逆であるから, 順序の原理より

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_{j_i}}$$

さらに $j_i \geq i$ であるから

$$\leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{i}$$

例4 $x_i, y_i (i=1, 2, \dots, n)$ は

$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ かつ $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$

を満たす実数である. y_1, y_2, \dots, y_n の任意の置換を

z_1, z_2, \dots, z_n

とおくとき

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを証明せよ.

(1975年IMO第1問)

解 $\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2$ より

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow -\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq -\sum_{i=1}^n x_i z_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \sum_{i=1}^n x_i z_i$$

したがって, 順序不等式と同値である.

注意 順序の原理そのままがIMOで出題されることは非常に珍しい. しかし, 順序の原理を知らなければこの問題が解けないと考えるのは間違いです.

$n=2, n=3$ の場合に状況を調べ, すなわち

$a \leq b, x \leq y$ のとき $ax + by$ と $ay + bx$ の大小関係

$a \leq b \leq c, x \leq y \leq z$ のとき $ax + by + cz$ と $ay + bz + cx$ の大小関係

を調べ, その中で解決の糸口を見つけ解答を作り上げるのです.

この行為こそが数学を学ぶ目的です. 皆さんこれから経験する大学入試も全く同じです.

問題の状況を正確に把握し, いくつかの例を調べ (n は $n=2$ または $n=3$ で調べよ) 糸口を見つけ解答を作るトレーニングこそが数学の勉強です. このことに気がついた生徒は必ずよい結果を出していますし, 大学入学後の学習にも計り知れない恵みを与えます.

皆さんの数学の学習法をもう一度見直してみましょう。入試問題の上手な解答を読んでいるだけの生徒が多いんじゃないかな。もちろん基本事項を身につけるため、問題をたくさん解いて内容に慣れることも大切で、これを欠かすわけにはいけません。しかし、それが終了したら、ゆっくり時間をかけて問題を解くことをお勧めします。

(順序の原理終わり)