

数学競技における不等式

数学競技に出題された不等式の問題について、比較的一般の高校生が解きやすいと思われる問題を集めました。とりあえず、ヒントなしで解いてみましょう。解説は、問題を題材に高校生に学んでほしい内容をまとめました。

例題1 正の数 x, y, z が $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のとき

$$S = \frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} + \frac{yz}{x}$$

の最小値を求めよ。(1988年ソ連10年生第2問)

解説

1. まず、自然に考えるのは、

$$2S = \left(\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y}\right) + \left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right) + \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}\right)$$

相加相乗平均不等式より

$$\geq 2(x + y + z) \quad \dots \textcircled{1}$$

これでは、うまくいきそうにありません。実際、 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ のときの $x + y + z$ の値の範囲は、平面 $x + y + z = k$ が単位球に交わる条件より

$$1 < x + y + z \leq \sqrt{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

①は最小値をとらないし、①の最小値をとる場合は②では最大値です。

2. ここで、 $x + y + z$ と $x^2 + y^2 + z^2$ の大小関係を調べましょう。次数をそろえて $(x + y + z)^2$ と $x^2 + y^2 + z^2$ との関係を探ることになります。ちなみに、一般に恒等的になりたつ不等式は、左辺、右辺の最大次数は同じ場合がほとんどです。

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

より

$$2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$$

したがって

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$$

両辺を9で割り平方根をとることにより

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3}$$

次に、 $xy + yz + zx$ と $x + y + z$, xyz ($x, y, z > 0$) との関係を探しましょう。

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\ &\geq 3(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

より、両辺を9で割り平方根をとれば

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}}$$

相加平均, 相乗平均の関係より,

$$\frac{xy+yz+zx}{3} \geq \sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot zx} = \sqrt[3]{(xyz)^2}$$

両辺の平方根をとることにより

$$\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

以上で x, y, z の基本対称式の間には

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

が成り立つことが分かりました. 等号が成り立つのは, どちらも $x = y = z$ のときです.

2. そこで, 仮定の $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 次数を合わせて

$$S^2 = \left(\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \right)^2 \quad \text{の最小値を求めて解決しよう.}$$

条件が $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ より, S を 2 次式にして考えることは自然です (S は 1 次式と見る)

$$\begin{aligned} S^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) \\ &\leq 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3 \end{aligned}$$

等号が成り立つのは

$$\frac{x^2y^2}{z^2} = \frac{z^2x^2}{y^2} = \frac{x^2y^2}{z^2} \quad \therefore x = y = z$$

よって, S の最大値は $\sqrt{3}$.

例題 2 $a > 1, b > 1$ である実数 a, b に対して

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$$

が成り立つことを証明せよ. (1992年ソ連10年生第1問)

解説

1, $\frac{a^2}{b-1}, \frac{b^2}{a-1}$ の積 $\frac{a^2}{b-1} \cdot \frac{b^2}{a-1}$ は $\frac{a^2}{a-1}$ と $\frac{b^2}{b-1}$ をべつべつに調べればよいので, 左辺に相加平均, 相乗平均の関係を利用するのは自然のことです.

2. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ ($x > 1$) の最小値を求めましょう.

これは、微分し、増減を調べるのがわかりやすいでしょう. 微分が分からなければ

$$\frac{x^2}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} \text{ と変形して, 相加平均相乗平均の関係を利用してよく,}$$

$$\frac{x^2}{x-1} = k \text{ すなわち 2 次方程式}$$

$x^2 - kx + k = 0$ が少なくとも 1 つの $1 < x$ の解を持つ k の最小値を求めてもよい.

$$D = k^2 - 4k \geq 0 \text{ より } k \leq 0, \quad 4 \leq k$$

(i) $4 \leq k$ のとき $y = f(x) = x^2 - kx + k$ のグラフを考えることにより $1 < x$ の解を持ち,

(ii) $k \leq 0$ のとき $f(0) \leq 0, f(1) > 0$ より $1 < x$ の解は持たない.

したがって $1 < x$ のとき $\frac{x^2}{x-1} \geq 4$ が成り立つ

3. 2 つの不等式で同時に等号が成り立つ x の値が存在することが大切です.

解答 相加平均相乗平均の不等式より

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 2 \sqrt{\frac{a^2}{b-1} \cdot \frac{b^2}{a-1}} = 2 \sqrt{\frac{a^2}{a-1} \cdot \frac{b^2}{b-1}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} \geq 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①で等号が成り立つのは

$$\frac{a^2}{b-1} = \frac{b^2}{a-1}$$

②で等号が成り立つのは $x = 2$

$a = b = 2$ のとき①, ②ともに等号が成り立つから $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$ が成り立つ. 等

号が成り立つのは $a = b = 2$ のとき.

例題 3

任意の実数 x で次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$x^4 - x + \frac{1}{2} > 0 \quad (1990 \text{ 年ソ連 9 年生第 1 問})$$

解説

1. 微分を用いるのが一番やりやすいでしょう. 値の評価が必要ですが大学入試問題でも頻出です.

$$f(x) = x^4 - x + \frac{1}{2}$$

とおく. $f'(x) = 4x^3 - 1$ より

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{2}$$

したがって $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ と 2 の大小を調べることになります。

$$\text{両方 3 乗すると } \frac{27}{4} \text{ と } 8 \text{ となり } \frac{27}{4} < 8 \text{ より } \frac{3}{\sqrt[3]{4}} < 2$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) > 0$$

したがって証明されました。

2 数の大小を調べるには、大小の変わらない変形を続けて行うことによって示します。次の例を参考にしましょう。

例 $\frac{5+\sqrt{7}}{2}$ と $\frac{8+\sqrt{11}}{3}$ の大小関係を調べましょう。

大小が入れ替わらない変形をします。

$$\begin{array}{ll} \text{6 倍する} & 3(5+\sqrt{7}) & 2(8+\sqrt{11}) \\ & 3\sqrt{7} & 2\sqrt{11}+1 \\ \text{両辺平方} & 63 & 45+4\sqrt{11} \\ & 18 = \sqrt{324} & 4\sqrt{11} = \sqrt{176} \\ \text{より } \frac{5+\sqrt{7}}{2} > \frac{8+\sqrt{11}}{3} & \text{が分かります。} \end{array}$$

2 数の大小といえば次の問題は面白い。

問題 n^{n+1} と $(n+1)^n$ の大小を調べよ。

結論は $n=1, 2$ のとき $n^{n+1} < (n+1)^n$

$n \geq 3$ のとき $n^{n+1} > (n+1)^n$

となります。

微分を用いると比較的簡単です。

n^{n+1} と $(n+1)^n$ の両方の $n(n+1)$ 乗根をとり $n^{1/n}$, $(n+1)^{1/(n+1)}$ の大小を調べればよい。

$f(x) = x^{1/x}$ とおき $f(n)$ と $f(n+1)$ の大小を調べるために

$$g(x) = \log f(x) = \frac{\log x}{x} \text{ で考える。}$$

$$g'(x) = \frac{-(\log x - 1)}{x^2} \text{ より}$$

$e \leq x$ で $f(x)$ は単調減少。したがって $n \geq 3$ のとき $n^{n+1} \geq (n+1)^n$

微分を用いないとすると、数学的帰納法を用いることになります。

$n = k$ ($k \geq 3$) のとき成り立つと仮定する。すなわち

$$k^{k+1} \geq (k+1)^k \quad \dots \textcircled{1}$$

を仮定する。ここで、

$$(k+1)^{k+2} \geq (k+2)^{k+1} \quad \dots \textcircled{2}$$

を証明するには①より

$$\frac{(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}} \geq \frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)^k} \quad \dots \textcircled{3}$$

を証明すれば十分である。

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow \{(k+1)^2\}^{k+1} \geq k^{k+1} (k+2)^{k+1} \quad \dots \textcircled{4}$$

$k \geq 3$ のとき $(k+1)^2 \geq k(k+2)$ であるから④が成り立つ。

3. 問題に戻りましょう。微分を用いなければ次のように解くことになります、

$f(x) = x^4 - x + \frac{1}{2}$ について、 $-x$ を平方完成の中に入れるために、

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

したがって、次の変形が考えられる。

$$\begin{aligned} F(x) &= x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} \\ &= \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ここで、 $\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ 、 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ を同時に満足する x はないから

$f(x) > 0$ です。

例題4 $a \geq 0$ 、 x_1, x_2, \dots, x_n は正の数でかつ $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ を満たす。このとき次の不等式を証明せよ。

$$(a + x_1)(a + x_2) \dots (a + x_n) \geq (1 + a)^n$$

解説

1. 左辺を展開すると

$$\begin{aligned} &(a + x_1)(a + x_2) \dots (a + x_n) \\ &= a^n + a^{n-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + a^{n-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \\ &\quad + a^{n-3} \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i x_j x_k + \dots + x_1 x_2 \dots x_n \end{aligned}$$

となります。ここで、同次の基本対称式の和と n 次の基本対称式 $x_1 x_2 \dots x_n$ との関係を学びましょう。

1次は $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \leq (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}$ となります.

2次は

$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ は ${}_n C_2$ 個の和であり, 算術-幾何平均不等式を用いると

$$\frac{{}_n C_2 \times 2}{n} = \frac{2}{{}_n C_2}$$

より

$$\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j}{{}_n C_2} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{2/n}$$

$$\therefore \left(\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j}{{}_n C_2} \right)^{1/2} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}$$

同様に, k 次の場合は

$$\left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}{{}_n C_k} \right)^{1/k} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}$$

が成り立つ.

したがって, $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ のとき

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \geq {}_n C_k$$

が成り立ちます. ここまでくれば後は一本道です.

$$(a+x_1)(a+x_2)\dots(a+x_n) \geq a^n + {}_n C_1 a^{n-1} + {}_n C_2 a^{n-2} + \dots + 1 = (1+a)^n$$

2. 相加, 相乗平均の不等式より次が成り立ちます.

$$a+x_i \geq 2a^{\frac{1}{2}} \sqrt{x_i} \quad \dots \textcircled{1}$$

①より得られる不等式は

$$(a+x_1)(a+x_2)\dots(a+x_n) \geq 2^n a^{\frac{n}{2}} \quad \dots \textcircled{2}$$

であり, ここで $2^n a^{\frac{n}{2}} \leq (1+a)^n$ ($\Leftrightarrow a^n \leq \left\{ \left(\frac{1+a}{2} \right)^2 \right\}^n$ より) であるから与えら

れた不等式の証明にはなっていません.

この理由を考えましょう.

①において等号が成り立つのは $x_i = a$ ($i = 1, 2, \dots, n$) のときで, このとき $x_1 x_2 \dots x_n = a^n$. ここで $a \neq 1$ のとき①で等号が全て成り立つのは不可能です. したがって②において等号は成り立ちません. このように等号を含む不等式では, 等号が成

り立つための条件に注意をはらわなければならないことを意味しています。

次の例で確認しましょう。

例 $a > 0$ のとき $(a + \frac{1}{a})(a + \frac{4}{a})$ の最小値を求めよう。

標準的な解答は左辺を展開し

$$a^2 + \frac{4}{a^2} + 5 \geq 2\sqrt{a^2 \times \frac{4}{a^2}} + 5 = 9$$

等号が成り立つのは $a = \sqrt{2}$ のとき。

しかし相加平均相乗平均の関係を次のように用いて

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a + \frac{4}{a} \geq 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(a + \frac{1}{a})(a + \frac{4}{a}) \geq 8 \quad \dots \textcircled{3}$$

より $(a + \frac{1}{a})(a + \frac{4}{a})$ の最小値を 8 とするのは間違いです。

①で等号が成り立つのは $a = 1$ で②で等号が成り立つのは $a = 2$ のときで、同時に等号が成り立つ a の値がないからです。

(数学競技における不等式終り)