

算術一幾何平均不等式のいろいろな証明

算術一幾何平均不等式には多くの証明法があります。ここでは、よく知られた、高校生でも十分理解できる証明を紹介します。

算術一幾何平均不等式とは次の定理です。

定理 x_1, x_2, \dots, x_n を n 個の正の数とする。このとき次の不等式が成り立つ。

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

ただし、等号が成り立つのは $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ のとき。

証明 1 (コーシーによる)

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \quad (\text{等号は } x_1 = x_2 \text{ のとき}) \text{ の } x_1, x_2 \text{ にそれぞれ}$$

$\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}$ を代入すれば

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{等号は } \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2}$$

$$\geq \left((x_1 x_2)^{\frac{1}{2}} \cdot (x_3 x_4)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

等号は $x_1 = x_2, x_3 = x_4$

$$= \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

両方等号が成り立つのは $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ のとき。

この操作を繰り返しおこなうことにより $n = 2^k$ のとき成り立つことが証明される。

次に、 $n \neq 2^k$ のときを考える。ここでは、 $2^{k-1} < n < 2^k$ とする。

$$c = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

とおく。 c を $(2^k - n)$ 個付け加え 2^k 個とし、

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + c + \dots + c}{2^k} \geq (x_1 x_2 \dots x_n c^{2^k - n})^{1/2^k}$$

・・・①

が成り立つ。ただし、等号は $x_1 = x_2 = \dots = x_n = c$

①の左辺は c であるから、両辺を 2^k 乗すると

$$c^{2^k} \geq x_1 x_2 \dots x_n c^{2^k - n}$$

$$\therefore c^n \geq x_1 x_2 \dots x_n$$

$$\therefore \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq c = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

等号は $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ のとき

証明 2 (微分を用いる)

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ のとき $x_1 x_2 \dots x_n$ の最大値が $\left(\frac{a}{n}\right)^n$ であるこ

とを数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 1$ のときは明らか。

(ii) $n = k$ のとき成り立つ、すなわち $x_1 + x_2 + \dots + x_k = a$ のとき $x_1 x_2 \dots x_k$ の最大値が $\left(\frac{a}{k}\right)^k$ であることを仮定する。

$n = k + 1$ のとき。

$x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = a$ の x_{k+1} を固定し、 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = a - x_{k+1}$ とすると、

($x_1 x_2 \dots x_{k+1}$ の最大値)

$$= \left\{ x_{k+1} \left(\frac{a - x_{k+1}}{k} \right)^k \text{ の } 0 \leq x_{k+1} \leq a \text{ における最大値} \right\}$$

が成り立つ。そこで

$$f(x) = x \left(\frac{a-x}{k} \right)^k = \frac{1}{k^k} x (a-x)^k \quad (0 \leq x \leq a)$$

の最大値を求める。 $f'(x)$ を計算すると

$$k^k f'(x) = - (k+1) (a-x)^{k-1} \left(x - \frac{a}{k+1} \right)$$

より、 $f(x)$ は $x = \frac{a}{k+1}$ で最大値をとる。よって

$$(x_1 x_2 \cdots x_k \text{の最大値}) = \frac{1}{k^k} \frac{a}{k+1} \left(a - \frac{a}{k+1}\right)^k = \left(\frac{a}{k+1}\right)^{k+1}$$

(i), (ii) より $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$ のとき $x_1 x_2 \cdots x_n$ の最大値は $\left(\frac{a}{n}\right)^n$ である.

証明3 (Ehlersによる)

$x_1 x_2 \cdots x_n = a^n$ ($x_i > 0$) のとき $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n a$ が成り立つことを証明する.

$n = 1$ のときは明らかに成り立つ.

$n = k$ のとき成り立つと仮定する. すなわち

$x_1 x_2 \cdots x_k = a^k$ のとき $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k a$ が成り立つことを仮定する. そこで $x_1 x_2 \cdots x_{k+1} = a^{k+1}$ のとき考える.

もし, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = a$ のときは

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} = (k+1) a \quad \cdots \textcircled{1}$$

であるので, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1}$ が成り立たないとき示せば十分である.

$x_1 < a$ と仮定する. このとき, $x_1 x_2 \cdots x_{k+1} = a^{k+1}$ であるから x_2 から x_{k+1} までのどれかは a より大きい. そこで, $x_2 > a$ としても一般性を失わない. このとき,

$$(x_1 - a)(x_2 - a) < 0 \quad \therefore x_1 x_2 + a^2 < a(x_1 + x_2)$$

したがって

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} > a + \frac{x_1 x_2}{a} + x_2 + \cdots + x_{k+1}$$

ここで, $\frac{x_1 x_2}{a} x_3 \cdots x_{k+1} = a^k$ であるから数学的帰納法の仮定より

$$\frac{x_1 x_2}{a} + x_3 + x_4 + \cdots + x_{k+1} \geq k a$$

$$\therefore x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} > (k+1) a \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より任意の自然数 n で

$$x_1 x_2 \cdots x_n = a^n \quad (x_i > 0) \text{ のとき } x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n a$$

が成り立つ.

証明4 (Jacobsthalによる)

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

とする. このとき

$$\begin{aligned} & \frac{G_{n-1}}{n} \left\{ (n-1) \frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} + \left(\frac{G_n}{G_{n-1}} \right)^n \right\} \\ &= \frac{n-1}{n} A_{n-1} + \frac{G_{n-1}}{n} \frac{G_n^n}{G_{n-1}^n} \\ &= \frac{n-1}{n} A_{n-1} + \frac{1}{n} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} = A_n \\ \therefore A_n &= \frac{G_{n-1}}{n} \left\{ (n-1) \frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} + \left(\frac{G_n}{G_{n-1}} \right)^n \right\} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

次に $f(x) = x^n - nx + n - 1$ ($x > 0$) を考える.

$$f'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$$

および $f(1) = 0$, $f'(x) = 0$ より

$x \geq 0$ で $f(x) \geq 0$ が成り立つ. 等号が成り立つのは $x = 1$.

$f(x)$ に $x = \frac{G_n}{G_{n-1}}$ を代入すると,

$$\left(\frac{G_n}{G_{n-1}} \right)^n \geq n \frac{G_n}{G_{n-1}} - n + 1$$

が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned} \therefore A_n &= \frac{G_{n-1}}{n} \left\{ (n-1) \frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} + \left(\frac{G_n}{G_{n-1}} \right)^n \right\} \\ &\geq \frac{G_{n-1}}{n} \left\{ (n-1) \frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} + n \frac{G_n}{G_{n-1}} - n + 1 \right\} \\ &= \frac{n-1}{n} A_{n-1} + G_n - \frac{n-1}{n} G_{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore A_n - G_n \geq \frac{n-1}{n} (A_{n-1} - G_{n-1})$$

したがって

$$\begin{aligned} A_n - G_n &\geq \frac{n-1}{n} (A_{n-1} - G_{n-1}) \\ &\geq \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} (A_2 - G_2) \\ &= \frac{2}{n} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2} \right) \geq 0 \\ \therefore \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \end{aligned}$$

証明5 (凸性の利用. 詳しくは重要不等式のファイルを参考にしてください)

補助命題1 $f(x)$ に2次導関数が存在し, (a, b) で $f''(x) > 0$ を満たすとする. このとき $a < x_i < b$ を満たす x_i ($1 \leq x_i \leq n$) と $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ をみたす α_i (≥ 0) で

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)$$

が成り立つ.

証明 $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ とおくと, $a < \text{Min}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \bar{x} \leq \text{Max}$

(x_1, x_2, \dots, x_n) が成り立つ. ここで各 x_i について平均値の定理より

$$f(x_i) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + \frac{f''(\xi)}{2!} (x_i - \bar{x})^2$$

($a < \xi < b$)

が成り立ち, $f''(\xi) > 0$ であるから

$$f(x_i) \geq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_i - \bar{x})$$

$$\therefore \alpha_i f(x_i) \geq \alpha_i f(\bar{x}) + \alpha_i f'(\bar{x})(x_i - \bar{x})$$

各 i について辺々加えると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) &\geq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x} \right) \\ &= f(\bar{x}) \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)$$

次の補助命題は同様である.

補助命題 2 $f(x)$ に 2 次導関数が存在し, (a, b) で $f''(x) < 0$ を満たすとする. このとき $a < x_i < b$ を満たす x_i ($1 \leq i \leq n$) と $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ をみたす α_i (≥ 0) で

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)$$

が成り立つ.

定理の証明 $f(x) = \log x$ とおく. このとき $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ (< 0) で

ある. 補助命題 2 より任意の正の数 x_1, x_2, \dots, x_n と $\alpha_i = \frac{1}{n}$ について

$$\frac{\log x_1 + \dots + \log x_n}{n} \leq \log \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

が成り立つから

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

を得る.

補助命題より容易に得られる性質を述べる.

定理 A_1, A_2, \dots, A_n が $0 < A_i < \pi$ を満たすとき

$$\frac{\sin A_1 + \sin A_2 + \dots + \sin A_n}{n} \leq \sin \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}$$

が成り立つ。

証明 $f(x) = \sin x$ とおくと $(0, \pi)$ で $f''(x) = -\sin x < 0$ であるから

$$\frac{\sin A_1 + \sin A_2 + \dots + \sin A_n}{n} \leq \sin \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}$$

が成り立つ。

系 $\triangle ABC$ において $\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{\pi}{3}$

定理 x_1, x_2, \dots, x_n を正の数, k を正の整数とする. このとき

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \left(\frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}}$$

が成り立つ。

証明 $f(x) = x^k$ とおくと $x > 0$ で $f''(x) > 0$ であるから

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^k \leq \frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}}$$

(算術-幾何平均不等式のいろいろな証明終わり)