

重要不等式

数学の競技において、よく利用される算術、幾何、調和平均不等式、コーシー不等式およびヘルダー不等式について解説します。

ここで用いる、関数の凸性 ($f''(x) > 0$ または $f''(x) < 0$) を利用する方法はとても応用範囲が広く、皆さんも、具体的な関数で不等式を作ることをお勧めします。

ここでは、関数の性質を利用して、不等式の性質を調べます。

まず、 x_1, x_2, \dots, x_n に対して $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, $\lambda_i \geq 0$ を満たす λ_i を用いて \bar{x} を

$$\bar{x} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \quad \dots \textcircled{1}$$

によって定義します。この \bar{x} を x_1, x_2, \dots, x_n の重みつき平均といいます。なお通常の平均

は $\lambda_i = \frac{1}{n}$ のときで、実際には $\lambda_i = \frac{1}{n}$ のとき扱う場合が多い。

さて、平均値の定理すなわち

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$$

より、 x_i について

$$f(x_i) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_i - \bar{x})^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立ちます。

①を λ_i 倍し辺々加えると

$$\sum_i \lambda_i f(x_i) = f(\bar{x}) + \sum_i \lambda_i \frac{f''(\xi)}{2}(x_i - \bar{x})^2$$

$$(\because \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1, \quad \bar{x} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n)$$

したがって次の定理が成り立ちます。

定理1 各 i について $a \leq x_i \leq b$ を満たす。区間 $[a, b]$ 上で定義された関数 $f(x)$ と $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, $0 \leq \lambda_i \leq 1$ を満たす λ_i について次が成り立つ。

(1) (a, b) で $f''(x) > 0$ のとき

$$\sum_i \lambda_i f(x_i) \geq f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right)$$

(2) (a, b) で $f''(x) < 0$ のとき

$$\sum_i \lambda_i f(x_i) \leq f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right)$$

(1) , (2) と、等号が成り立つのは $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ のときである。

注意 実際に用いるのは $\lambda_i = \frac{1}{n}$ の場合が多いのですが、証明を見れば分かるように λ_i の場合も

$\frac{1}{n}$ の場合も手間は同じです。さらに一般の場合は全体の見通しがよくなるという効果もあります。

定理 1 から導き出せる例を挙げましょう。

例 1. $f(x) = \log x$ は $0 < x$ で $f''(x) < 0$ ですから $\lambda_i = \frac{1}{n}$ とすれば

正の数 x_i について

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

が成り立ちます。

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ は $0 < x$ で $f''(x) > 0$, $0 < x$ で $f''(x) < 0$ ですから

$\lambda_i = \frac{1}{n}$ とすれば、正の数 x_i について

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

負の数 x_i について

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

が成り立ちます。これは算術平均と調和平均の関係です。

3. 正の数 a, b, c について $a + b + c = 1$ を満たすとき、

$f(x) = \frac{1}{x}$ を用いれば、任意の正の数 x, y, z で

$$\frac{1}{ax+by+cz} \leq \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立ち、さらに①に $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$

を代入すれば

$$\frac{1}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

が成り立ちます.

$f(x) = x^3$ を用いれば任意の正の数 x, y, z で

$$(ax + by + cz)^3 \leq ax^3 + by^3 + cz^3$$

$x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ を代入すれば

$$27 \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

を得ます.

4. $f(x) = \sin x$ は $(0, \pi)$ で $f(x) < 0$. したがって $\triangle ABC$ で

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin \frac{A+B+C}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

が成り立ちます. 等号が成り立つのは $A=B=C$. すなわち正三角形のときです.

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると, $\triangle ABC$ の周の長さは

$$a + b + c = 2R (\sin A + \sin B + \sin C)$$

であるから, 円が与えられたとき, その円に内接する周の長さの一番長い三角形は正三角形であることが分かります.

5. $f(x) = \log \sin x$ とおくと $f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$ より $\triangle ABC$ で

$$\frac{\log \sin A + \log \sin B + \log \sin C}{3} \leq \log \sin \frac{A+B+C}{3} = \log \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin A \sin B \sin C \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

等号が成り立つのは正三角形のときです.

注意 以上挙げた例以外にも $f(x) = \cos x, \tan x, a^x$ 等で新しい不等式を作ってみましょう. なお, なお, 積の場合は例 5 のように \log を用いると解決する場合があります.

次に通常の平均の概念を拡張してます. すなわち,

正の数 x_1, x_2, \dots, x_n に対して

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1, \lambda_i \geq 0$ を満たす $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ により

$$\bar{x} \text{ を } \bar{x} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \quad \dots \textcircled{1}$$

によって定義し, この重み付き平均 \bar{x} をここでは $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の λ 平均とい

い、さらに $M_t(x, \lambda)$ を

$$M_t(x, \lambda) = (\lambda_1 x_1^t + \lambda_2 x_2^t + \dots + \lambda_n x_n^t)^{1/t} \quad \dots \textcircled{2}$$

によって定義し、この $M_t(x, \lambda)$ を $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の t 乗 λ 平均といいます。さらに、 $\lambda = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ のときの②を

$$M_t(x) = \left(\frac{x_1^t + x_2^t + \dots + x_n^t}{n}\right)^{1/t} \quad \dots \textcircled{3}$$

とあらわし、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の t 乗平均と呼びます。

注意 言葉で言うと分かりづらいが、要するに各 x_i を t 乗しその平均をとりその t 乗根を t 乗平均といいます。一般に、単調増加または単調減少な関数 $f(x)$ で逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在するの

$$f^{-1}\left(\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}\right) \quad \dots \textcircled{4}$$

が定義でき、④を x_1, x_2, \dots, x_n の f 一平均といいます。

状況に応じていろいろな平均を考えます。標準偏差の定義では $f(x) = x^2$ を用い、2点間の速さの平均では $f(x) = \frac{1}{x}$ を用います。前者を平方平均、後者を調和平均といいます。

t 乗平均 $M_t(x)$ で名前の付いているのは次の3つです。

$$M_1(x) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (\text{算術平均})$$

$$M_{-1}(x) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \quad (\text{調和平均})$$

$$M_2(x) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \quad (\text{平方平均})$$

次に $M_0(x)$ を考えますがそのままでは定義できないので $t \rightarrow 0$ を考えます。

$$M_t(x) = \exp(\log M_t(x)) = \exp\left(\frac{\log \frac{x_1^t + x_2^t + \dots + x_n^t}{n}}{t}\right)$$

ロピタルの定理より $\frac{\log \frac{x_1^t + x_2^t + \dots + x_n^t}{n}}{t}$ の分母、分子を t で微分し

$t \rightarrow 0$ とすれば、

$$M_t(x) \rightarrow \exp\left(\frac{\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_n}{n}\right) \quad (t \rightarrow 0)$$

$$= \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

したがって、 $M_0(x) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ と定義することは自然です。

さて、正の数 x_1, x_2, \dots, x_n を固定したとき

$$M_t(x) = \left(\frac{x_1^t + x_2^t + \cdots + x_n^t}{n} \right)^{1/t}$$

の値が t の値によってどのように変わるかを調べます。

まず、 $f(x) = x \log x$ ($x > 0$) を考える。

$$f''(x) = \frac{1}{x} \quad \text{より} \quad f''(x) > 0$$

したがって、

$$\frac{x_1 \log x_1 + x_2 \log x_2 + \cdots + x_n \log x_n}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right) \log \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right)$$

等号が成り立つのは $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のとき。

次に

$$\frac{x_1^t + x_2^t + \cdots + x_n^t}{n} \frac{d}{dt} \log M_t(x) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$= \frac{x_1^t + x_2^t + \cdots + x_n^t}{n} \cdot \frac{\frac{d}{dt} M_t(x)}{M_t(x)} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立ちます。これから示すことは、①が正であることを示し、②より $\frac{d}{dt} M_t(x) > 0$ すなわち

$M_t(x)$ が t について単調増加であることを示すことです。

$$\log M_t(x) = \log \left(\frac{x_1^t + x_2^t + \cdots + x_n^t}{n} \right)^{1/t} = \frac{\log \left(\frac{x_1^t + x_2^t + \cdots + x_n^t}{n} \right)}{t}$$

ですから、

$$\frac{d}{dt} \log M_t(x) = \frac{1}{t^2} \left\{ t \cdot \frac{(\log x_1)x_1^t + \cdots + (\log x_n)x_n^t}{x_1^t + \cdots + x_n^t} - \log \left(\frac{x_1^t + \cdots + x_n^t}{n} \right) \right\}$$

より、①は

$$\frac{x_1^t + x_2^t + \cdots + x_n^t}{n} \frac{d}{dt} \log M_t(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_1^{t'} + \dots + x_n^{t'}}{n} \cdot \frac{1}{t^2} \left\{ t \cdot \frac{(\log x_1)x_1^{t'} + \dots + (\log x_n)x_n^{t'}}{x_1^{t'} + \dots + x_n^{t'}} - \log\left(\frac{x_1^{t'} + \dots + x_n^{t'}}{n}\right) \right\} \\
&= \frac{x_1^{t'} + \dots + x_n^{t'}}{n} \cdot \frac{1}{t^2} \left\{ \frac{(\log x_1)x_1^{t'} + \dots + (\log x_n)x_n^{t'}}{x_1^{t'} + \dots + x_n^{t'}} - \log\left(\frac{x_1^{t'} + \dots + x_n^{t'}}{n}\right) \right\} \\
&= \frac{1}{t^2} \left\{ (\log x_1)^t x_1^{t'} + \dots + (\log x_n)^t x_n^{t'} \right\} - \left(\frac{x_1^{t'} + \dots + x_n^{t'}}{n} \right) \log \left(\frac{x_1^{t'} + \dots + x_n^{t'}}{n} \right)
\end{aligned}$$

ここで、すでに

$$\frac{x_1 \log x_1 + x_2 \log x_2 + \dots + x_n \log x_n}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) \log \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)$$

が証明されており、 $M_t(x) > 0$ であるから

$$dM_t(x) / dt \geq 0$$

が証明されました。なお等号が成り立つのは $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ のときに限ります。

したがって、次の定理が証明されました。

定理2 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の t 乗平均

$$M_t(x) = \left(\frac{x_1^t + x_2^t + \dots + x_n^t}{n} \right)^{1/t}$$

は t について増加関数である。さらに、 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ のときは

$$M_t(x) \equiv x_1$$

であり、 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ でないとき $M_t(x)$ は t について狭義の増加関数です。

$$M_1(x) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (\text{算術平均})$$

$$M_0(x) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (\text{幾何平均})$$

$$M_{-1}(x) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \quad (\text{調和平均})$$

$$M_2(x) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \quad (\text{平方平均})$$

に関しては定理2より

$$M_{-1}(x) \leq M_0(x) \leq M_1(x) \leq M_2(x)$$

が成り立ちます。等号が成り立つのは $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ の場合に限る。

さらに $M_t(x) = \left(\frac{x_1^t + x_2^t + \dots + x_n^t}{n}\right)^{1/t}$ の $t \rightarrow \infty$, $t \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べます.

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n$$

とすると

$$\frac{x_n}{\sqrt[n]{n}} \leq M_t(x) \leq x_n \quad (\because \text{左の不等式は } x_n \text{ 以外を } 0, \text{ 右の不等式はすべて } x_n \text{ にする})$$

より, $t \rightarrow \infty$ のとき $M_t(x) \rightarrow x_n = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$

次に $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ について

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)$$

と定義すると $M_{-t}(x) = \frac{1}{M_t(\frac{1}{x})}$ であるから $t \rightarrow -\infty$ のときの $M_t(x)$ の極限值は

$t \rightarrow \infty$ のときの $M_{-t}(x)$ 極限值であり, それは

$\max\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)$ の逆数すなわち $\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ です.

以上のことより

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \dots \leq M_{-1}(x) \leq M_0(x) \leq M_1(x) \leq M_2(x) \leq \dots \leq \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

が成り立つことが分かりました.

雰囲気はだいぶ変わりますが, 不等式の証明を続けます.

これからは, $x > 0$ で定義された x の関数

$$f(x) = x^a - ax + a - 1$$

を利用して考えます. これはとても役に立つことがだんだん分かってくると思います. また, 大学入試問題にもしばしば登場する関数です.

まず, $f(x)$ のグラフを考えるために微分をしましょう.

$$f'(x) = ax^{a-1} - a = a(x^{a-1} - 1)$$

より a の値にかかわらず $f'(1) = 0$. さらに

$$f''(x) = a(a-1)x^{a-2}$$

より $x > 0$ において

$a < 0$, $1 < a$ のとき $f''(x) > 0$, すなわち $x = 1$ で最小値をとる.

$0 < a < 1$ のとき $f''(x) < 0$, すなわち $x = 1$ で最大値をとる.

$f(1) = 0$ であるから次が成り立ちます.

定理 3 $x > 0$ において

$$a < 0, 1 < a \text{ のとき } f(x) = x^a - ax + a - 1 \geq 0$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき } f(x) = x^a - ax + a - 1 \leq 0$$

が成り立つ。2つの不等式とも等号が成り立つのは $x = 1$ のとき。

まず、この定理を応用して算術-幾何平均不等式を拡張しましょう。

$$0 < a < 1 \text{ のとき } f(x) = x^a - ax + a - 1 \leq 0$$

の x に $\frac{x}{y}$ を代入する。

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^a - a \cdot \frac{x}{y} + a - 1 \leq 0$$

等号が成り立つのは $x = y$ のとき。

両辺に y をかけると

$$x^a y^{1-a} \leq ax + (1-a)y$$

$0 < a < 1$ であるから $a = \frac{1}{p}$, $1-a = \frac{1}{q}$ とおけば $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ であり

$$x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \quad (\text{等号は } x = y \text{ のとき})$$

これは2変数の算術-幾何平均不等式すなわち相加相乗平均の拡張です。すなわち $p = q = 2$ のときが相加相乗平均です。

上述の関数を用いて、 n 変数の拡張された算術-幾何平均不等式を数学的帰納法で証明しましょう。すなわち次の定理を証明します。

定理4 $x_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ のとき

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

が成り立つことを仮定すれば

$y_i \geq 0$, $\beta_i > 0$, $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n+1} = 1$ のとき

$$\prod_{i=1}^{n+1} y_i^{\beta_i} \leq \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i y_i \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

証明 $\beta_n + \beta_{n+1} = \gamma$ とおき

$$y_n^{\beta_n/\gamma} \cdot y_{n+1}^{\beta_{n+1}/\gamma} = z$$

とおく。このとき

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} + \gamma = 1$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}
& y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots y_{n+1}^{\beta_{n+1}} \\
&= y_1^{\beta_1} \cdots y_{n-1}^{\beta_{n-1}} z^\gamma \\
&\leq \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_{n-1} y_{n-1} + \gamma z \quad (\because \text{帰納法の仮定})
\end{aligned}$$

ここで

$$z = y_n^{\beta_n/\gamma} \cdot y_{n+1}^{\beta_{n+1}/\gamma} \quad \text{で} \quad \frac{\beta_n}{\gamma} + \frac{\beta_{n+1}}{\gamma} = 1 \quad \text{より} \quad z \leq \frac{\beta_n}{\gamma} \cdot y_n + \frac{\beta_{n+1}}{\gamma} \cdot y_{n+1}$$

$$\therefore \gamma z \leq \beta_n y_n + \beta_{n+1} y_{n+1}$$

したがって、

$$y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots y_{n+1}^{\beta_{n+1}} \leq \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_{n+1} y_{n+1}$$

が成り立ち証明されました。等号が成り立つのは、証明において不等号は2つあり、最初の不等式が等号であるのは

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_{n-1} = z \quad \cdots \textcircled{1}$$

2番目の不等式が等号であるのは

$$y_n = y_{n+1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

②のとき $z = y_n^{\beta_n/\gamma} \cdot y_{n+1}^{\beta_{n+1}/\gamma} = y_n$ ですから
等号が成り立つのは $y_1 = y_2 = \cdots = y_{n+1}$ のときです。

さて、もう一度議論を戻しましょう。

定理3 $x > 0$ において

$$a < 0, \quad 1 < a \text{ のとき } f(x) = x^a - a x + a - 1 \geq 0$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき } f(x) = x^a - a x + a - 1 \leq 0$$

が成り立つ。2つの不等式とも等号が成り立つのは $x = 1$ のとき。

を利用して、 $0 < a < 1$ のとき $f(x)$ の x に $\frac{x}{y}$ を代入し、さらに $a = \frac{1}{p}$ において

定理4 p, q が $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$ のとき、正の数 x, y に対して

$$x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$$

が成り立つ。ただし等号が成り立つのは $x = y$ のときである。

が示されました。しかし、注意が必要です。上の定理3で $a < 0, 1 < a$ と $0 < a < 1$ で

は不等号の向きが変わります。さらに $a = \frac{1}{p}$ とおいています。

ここで $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ のときの p, q の関係を確認しましょう。

$q = 1 + \frac{1}{p-1}$ より, p, q の関係式は右のグラフとなる

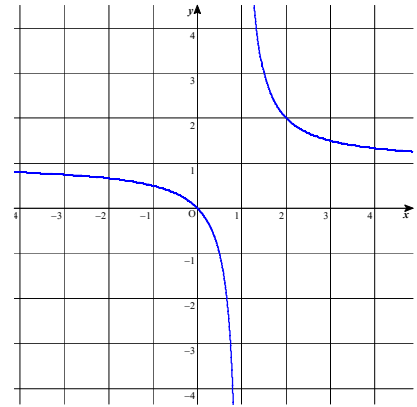
ので,

$$1 < p \text{ のとき } 1 < q$$

$$0 < p < 1 \text{ のとき } q < 0$$

$$p < 0 \text{ のとき } 0 < q < 1$$

したがって, $a = \frac{1}{p}$ に注目し, まとめると次のようになる.



定理5 p, q が $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす, このとき, 正の数 x, y に対して

$$p > 1 \text{ なら } x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$p < 0, 0 < p < 1 \text{ なら } x^{1/p} \cdot y^{1/q} \geq \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ. ただし等号が成り立つのは $x = y$ のときである.

①については面積比較で考えた方が分かりやすい. すなわち,

$f(x) = x^{p-1}$ とおく. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ のとき $a > 0, b > 0$ に対して

$$\int_0^{a^{1/p}} f(x) dx + \int_0^{b^{1/q}} f^{-1}(x) dx = \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

(左の積分の上端は $a^{1/p}$, 右の積分の上端は $b^{1/q}$)

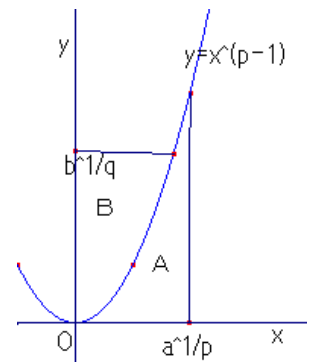
である. 一方右図の面積を比較することにより,

$$a^{1/p} \cdot b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

が成り立つ. 等号が成り立つのは,

$$b^{1/q} = f(a^{1/p}) = a^{p-1/p}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ のとき } \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \text{ であるから } a = b \text{ のときです.}$$



上の定理を利用して, 新しい定理を導き出します.

正の数 $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ に対して

$$X = \sum_{i=1}^n x_i^p, Y = \sum_{i=1}^n y_i^q$$

とおき、定理の x, y にそれぞれ $\frac{x_i^p}{X}, \frac{y_i^q}{Y}$ を代入する.

$p > 1$ のとき

$$\left(\frac{x_i^p}{X}\right)^{1/p} \left(\frac{y_i^q}{Y}\right)^{1/q} \leq \frac{x_i^p}{pX} + \frac{y_i^q}{qY} \quad \dots \textcircled{1}$$

したがって、各 i について加えることにより

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt[p]{X}} \cdot \frac{y_i}{\sqrt[q]{Y}} \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^p}{pX} + \frac{y_i^q}{qY}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt[p]{X} \cdot \sqrt[q]{Y}$$

$$= \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n x_i^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n y_i^q}$$

$p < 0, 0 < p < 1$ のときは不等号の向きが逆になります.

等号が成り立つのは①の各 i で

$$\frac{x_i^p}{X} = \frac{y_i^q}{Y}$$

が成り立つ. すなわち

$$x_i^p : y_i^q = X : Y$$

したがって、

$$x_1^p : y_1^q = x_2^p : y_2^q = \dots = x_n^p : y_n^q$$

のときです.

以上まとめると次の定理になります. なお、この不等式をヘルダーの不等式といいます.

定理6 p, q が $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす、このとき、正の数 x, y に対して

$$p > 1 \text{ なら } \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n x_i^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n y_i^q}$$

$$p < 0, 0 < p < 1 \text{ なら } \sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n x_i^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n y_i^q}$$

が成り立つ. ただし等号が成り立つのは

$$x_1^p : y_1^q = x_2^p : y_2^q = \dots = x_n^p : y_n^q$$

のときです.

ヘルダー不等式の $p = 2$ の場合がコーシー不等式すなわち次の定理です.

定理7 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ を実数とする. このとき

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

が成り立つ. これをコーシー不等式と呼ぶ.

コーシーの定理の標準的な証明は次の2つである.

証明1
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^n a_i b_i a_j b_j$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) = \sum_{i,j=1}^n a_i^2 b_j^2$$

したがって

$$\begin{aligned} I &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j (a_i b_j - a_j b_i) \end{aligned}$$

さらに $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) = \sum_{i,j=1}^n a_j^2 b_i^2$ とかくことができるから

$$I = \sum_{i,j=1}^n a_j b_i (a_j b_i - a_i b_j)$$

ゆえに
$$I = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0.$$

等号が成り立つための必要十分条件は

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \dots = a_n : b_n$$

です.

証明2 $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$ として差し支えない. ここで2次関数

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) t^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) t + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i t - b_i)^2 \end{aligned}$$

を考える. 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\phi(t) \geq 0$. したがって, 判別式が0以下より

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

かつ,

(等号が成り立つ) $\hat{U} \phi(t_0) = 0$ となる $t_0 \in \mathbb{R}$ が存在する.

$\hat{U} b_i = t_0 a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) となる $t_0 \in \mathbb{R}$ が存在する.

なお, n 次元のベクトルが理解できれば, 内積の図形的意味より証明できます.

(重要不等式終わり)