

# 球面幾何学

ここでは、球面上で幾何学を行います。

地球上は球面です。ですから、地球の2点間を平面上で調べては正確ではありません。近い2点を扱うときは大きな問題は起こりませんが、遠距離の2点間などは球面上の2点として扱う必要があります。

## 1. 緯度, 経度, 2点間の距離

まず、地球上の緯度, 経度を確認しましょう。

N, Sをそれぞれ地球の北極, 南極とします。点のAの経度とは3点N, S, Aを通る平面と, N, Sとロンドンのグリニッジ天文台を通る平面のなす角をグリニッジ天文台からAに向かってはかった角で定義します。ロンドンから見て東にすなわち左回りにはかったとき+, 逆向きを-とします。

次に緯度です。点Aの緯度は経線上の赤道から測った中心角です。右図で,  $\angle AOB = \phi$  が緯度です。忠, Oは球の中心です。北半球にあれば緯度は+で南半球にあれば-です。

経度は地球を真上からすなわち北極を手前にしてみると分かりやすいとおもいます。角度は左周り(反時計周り)がプラスですから, 左回りすなわち東経が+, 西経が-になります。

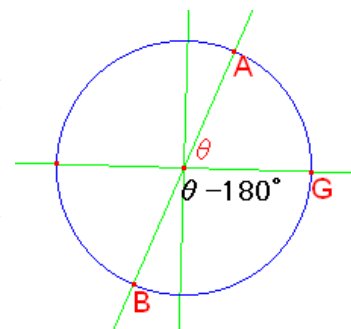
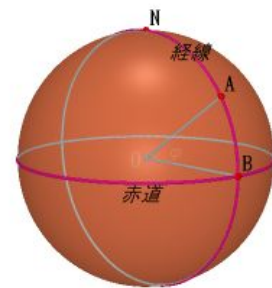
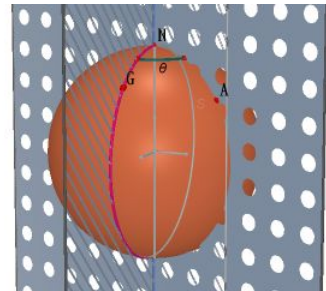
これから経度について東経 $a^\circ$ は $a^\circ$ , 西経 $a^\circ$ は $-a^\circ$ とします。これが標準的な数学における球の扱い方です。

点Aの緯度 $\theta^\circ$ , 経度 $\phi^\circ$ のときの対蹠点(球の中心に関する対称な点。裏側の点といってもよい)の緯度, 経度を確認しよう。緯度が $-\theta^\circ$ にことは分かりやすい。経度は地球を真上から見ると, 原点に関する対称な点であるから,  $180^\circ$ を足すか引けばいいのです。なお, この図より東経 $180^\circ$ と西経 $180^\circ$ は同じことが分かります。ちなみに東京は東経 $139^\circ$ , 北緯 $36^\circ$ と見れば, 東京の対蹠点は $139^\circ - 180^\circ = -41^\circ$ より西経 $41^\circ$ , 南緯 $-36^\circ$ となります。場所で言うとモンテビデオの少し東になります。

これからは, 球面の半径1とし, 球の中心が原点, 座標軸は赤道がx y平面上, グリニッジ天文台がx z平面上にあるようにx軸, y軸, z軸を設定します。

球面上の点Pは, 緯度, 経度が決まれば位置が決まります。Pの緯度, 経度がそれぞれ $\theta, \phi$ のとき $P(\theta, \phi)$ と表します。

球面上の点の緯度, 経度を与えたときのその点の座標を求めましょう。



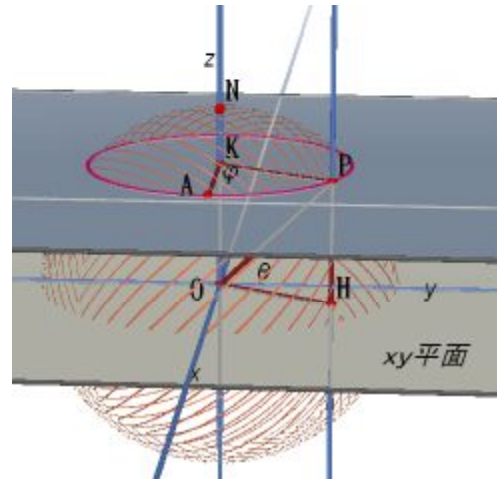
点Pの緯度が $\theta$ ，経度が $\phi$ とします。  
 Pから $x y$ 平面に垂線を下ろしその足をHとしま  
 す。∠POHがPの緯度の定義ですから

$$(P \text{ の } z \text{ 座標}) = PH = \sin \theta$$

次に，Pから $z$ 軸に垂線を下ろしその足をKと  
 します。Pは半径 $\cos \theta$ の円周上で右図で  
 ∠PKAが経度の定義ですからPの $x$ 座標， $y$ 座  
 標は

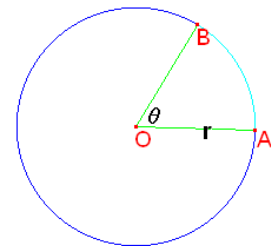
$$(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi)$$

となります。したがって，Pの座標は  
 $P(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$   
 となります。



球面上の点で緯度，経度が与えられたとき，その点の座標を求めることができました。  
 次に，球面上の2点間の距離を求めます。球面上の2点間の距離は，2点を通る大円（2  
 点と球の中心を通る平面によるこの球の切り口の円）の短い方の弧の長さとして定義します。  
 この大円の短いほうの弧の長さが球面上の2点間を結ぶ最短の長さであることの実は正  
 しいのですが証明は簡単ではありません。この事実を認めることにします。もし興味があ  
 ればこのホームページの「微分幾何」→「測地曲率と測地線」をご覧ください。

ここで，角を円弧の長さではかる角の弧度法の復習をしましょう。  
 弧度法とは，角の大きさを単位円のはかりたい中心角の扇形の  
 弧の長さとして定義する方法です。すなわち，半径の $r$ の円のと  
 き右図の∠AOB =  $\theta$ を



$$\frac{(\widehat{AB} \text{ の長さ})}{(\text{半径})}$$

と定める方法です。

この定義を見ると，角を割合で定義しています。すなわち

(長さ) ÷ (長さ) ですから無単位です。これが大切なことで，たとえば $y = \sin x$ を  
 考えたとき， $x$ の単位と $y$ の単位が異なるとき困ります。たとえば合成関数 $\sin(\sin x)$   
 や逆関数も扱うわけですから角度も無単位でなければ困るわけです。

話を戻しましょう。球面上の2点P，Q間の距離を求めましょう。今は半径1の球で考  
 えてますから，この球の大円は半径1の円です。

PQ間の距離は∠POQのことですから∠POQ =  $\theta$ とおけば，内積を用いて

$$\cos \theta = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$$

となります。

$\cos$ の逆関数を $\arccos$ とかけば

$$(PQ \text{ 間の距離}) = \arccos(\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})$$

となります。近くに関数電卓があれば是非用意しましょう。

ここでは、テキサス・インスツルメンツ社の Derive を用いています。

実際に 2 点間の距離を求めます。次は東京とニューヨークの距離を求めたものです

```
#1:  θ := 35 +  $\frac{40}{60}$ 
#2:  φ := 139 +  $\frac{45}{60}$ 
#3:  [COS(θ°)·COS(φ°), COS(θ°)·SIN(φ°), SIN(θ°)]
#4:  [-0.6200675211, 0.5249259043, 0.5830686615]
#5:  a := [-0.6200675211, 0.5249259043, 0.5830686615]
#6:  θ := 40 +  $\frac{47}{60}$ 
#7:  φ := -73 -  $\frac{58}{60}$ 
#8:  [COS(θ°)·COS(φ°), COS(θ°)·SIN(φ°), SIN(θ°)]
#9:  [0.2091319101, -0.7277314846, 0.6532003754]
#10: b := [0.2091319101, -0.7277314846, 0.6532003754]
#11: ACOS(a·b)
#12: 1.701992716
#13: R := 6370
#14: R·ACOS(a·b)
#15: 1.084169360·104
```

上の式は計算の結果を表示したものです。

1, 2 行は東京の緯度 (北緯 35 度 40 分), 経度 (東経 139° 46 分) を入力し, 4 行は東京の座標です。a は始点を原点としたときの終点が東京のベクトルです。

6, 7 行はニューヨークの緯度 (北緯 40 度 47 分), 経度 (西経 73 度 58 分) で, b はそのベクトルです。

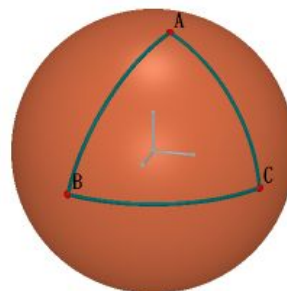
11 行の ACOS は cos の逆三角関数です。通常 arccos と書きます。なお, · は内積です。

12 行は弧度法ではかった角でもしこの角を度数法に直すなら  $180/\pi$  をかければよい。地球の半径は赤道半径と極半径では異なるが, ここでは  $R = 6370$  で計算した。この値によって当然結果は異なります。

15 行が東京, ニューヨーク間の距離となります。すなわち 10842 km となります。

2点間の線分が求められました。次に球面上の三角形を考えましょう。

球面上の3点A, B, Cが与えられたとき, 2頂点を大円弧のうち短いほうの円弧で結ぶことにより得られる, 3つの円弧による図形を球面三角形ABCという。ここでは, 球面三角形しか扱わないので, 球面三角形ABCを $\triangle ABC$ と表す。辺ABの長さは短い大円弧ABの長さである。



次に $\triangle ABC$ の内角を定義する。

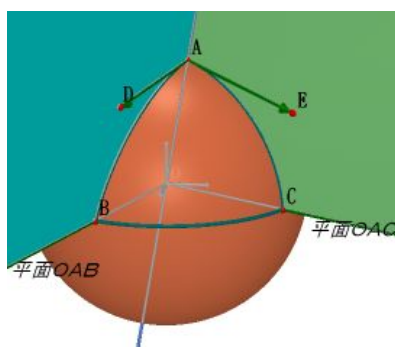
$\angle A$ の大きさは, Aにおける円弧ABの接線と円弧ACの接線のなす角で定義するのが自然である。その角を別の見方をしてみよう。

球の中心をOとすると, 円弧ABは平面OABと球の交線である。同様に円弧ACは平面OACと球の交線である。

Aにおける接線をAD, AEとすると,

$OA \perp AD, OA \perp AE$

が成り立つ。したがって,  $\angle A$ は2平面OAB, OACのなす角のことである。



2平面のなす角は2平面の法ベクトルのなす角で求めると便利である。

平面OAB, OACの法ベクトルはそれぞれ $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$ である。したがって, 2平面のなす角 $\theta$ は,  $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$ が単位ベクトルでないことに注意して,

$$\cos \theta = \frac{(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})}{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}|}$$

となる。計算は面倒そうであるが, 1回入力すればコピーして使えばよいので問題ない。

なお, 空間図形では, 鋭角, 鈍角区別する必要があるので $\angle BAC$ なら

$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$  と  $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$  のなす角, 真ん中の文字Aに対応する $\overrightarrow{OA}$ を先に書いて計算するとよい。

次は, 3頂点をAを東京, Bをニューヨーク, Cを南極としたときの $\angle BAC$ を求めたものである。

```

#5: a := [-0.6200675211, 0.5249259043, 0.5830686615]
#6: b := [0.2091319101, -0.7277314846, 0.6532003754]
#7: c := [0, 0, -1]
#8:  $\frac{a \times b}{|a \times b|}$ 
#9: [0.7738496135, 0.5315345601, 0.3444238478]
#10:  $\frac{a \times c}{|a \times c|}$ 
#11: [-0.6461239796, -0.7632324697, 0]
#12: d := [0.7738496135, 0.5315345601, 0.3444238478]
#13: e := [-0.6461239796, -0.7632324697, 0]
#14: ACOS(d·e)
#15: 2.703794274
#16:  $\frac{\text{ACOS}(d \cdot e) \cdot 180}{\pi}$ 
#17: 154.9160005

```

a, b, はすでに計算してある。17行は弧度法を度数法に直したものである。

次に△ABCの面積を求める。

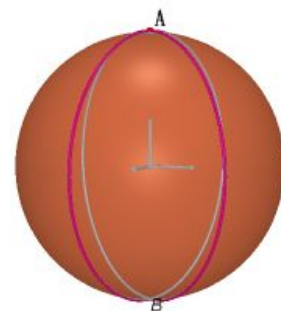
準備として月形の面積を求める。月形とは2つの大円で囲まれた図形のことである。

月形の面積は、大円を決める2平面のなす角をθとするとθに比例するので

$$4\pi \times \theta / 2\pi = 2\theta$$

である。

△ABCの面積を求めよう。1つの大円を赤道とすると考えやすい。



$\triangle ABC$ の内角をA, B, Cで表す.

大円BCを赤道とする. 2つの大円AB, ACは北半球を4つの場合に分け, 図のように

I, II, III, IVとする.  $\triangle ABC$ がIである.

$$I + II = 2C$$

$$I + III = 2B$$

I + IVは少し分かりづらいが,  $\triangle ABC$ と同じ図形が裏側にあるのを利用して

$$I + IV = 2A$$

辺々加えると

$$3I + II + III + IV = 2A + 2B + 2C$$

$$I + II + III + IV = 2\pi \text{ であるから}$$

$$2I = 2A + 2B + 2C - 2\pi$$

$$(\triangle ABC \text{の面積}) = A + B + C - \pi$$

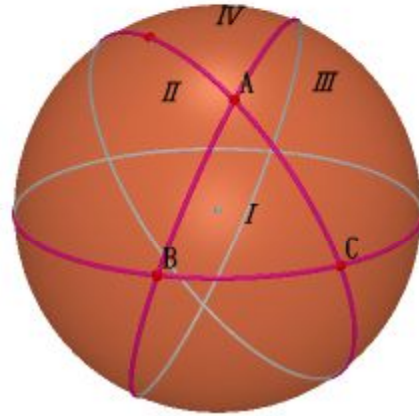
を得る.

なお, もし球の半径がrなら, 相似であるので $r^2$ を掛けて

$$(A + B + C - \pi) r^2$$

となる.

説明が分からなかったら, 大き目のボールにテープを張って考えてみよう. 必ず納得できるとおもいます.



3 頂点をAを東京, Bをニューヨーク, Cを南極としたときの $\triangle ABC$ の面積を求めよう. 次は上で計算した内容の続きである.

```
#18:  $\frac{b \times c}{|b \times c|}$ 
```

```
#19: [0.9611011739, 0.2761965485, 0]
```

```
#20:  $\frac{b \times a}{|b \times a|}$ 
```

```
#21: [-0.7738496135, -0.5315345601, -0.3444238478]
```

```
#22: f := [0.9611011739, 0.2761965485, 0]
```

```
#23: g := [-0.7738496135, -0.5315345601, -0.3444238478]
```

```
#24: ACOS(f.g)
```

```
#25: 2.669361877
```

```

#26:  $\frac{c \times a}{|c \times a|}$ 
#27: [0.6461239796, 0.7632324697, 0]
#28:  $\frac{c \times b}{|c \times b|}$ 
#29: [-0.9611011739, -0.2761965485, 0]
#30: h := [0.6461239796, 0.7632324697, 0]
#31: i := [-0.9611011739, -0.2761965485, 0]
#32: ACOS(h·i)
#33: 2.553125807
#34: ACOS(d·e) + ACOS(f·g) + ACOS(h·i) - π
#35: 4.784689305
#37:  $\frac{ACOS(d·e) + ACOS(f·g) + ACOS(h·i) - \pi}{4 \cdot \pi}$ 
#38: 0.3807534770

```

2 5行が∠B, 3 3行が∠C, 5 2行が△ABCの面積, 実際の面積を求めるなら半径RとしてR<sup>2</sup>をかければよい. △ABCの面積は地球全体の1/3を超えることが分かる.

四角形ABCDの面積は四角形を2つの三角形に分ければよいので

$$A + B + C + D - 2\pi$$

5角形ABCDEは

$$A + B + C + D + E - 3\pi$$

となる.

## 2. 球面における三角法

ここでは、球面三角形の辺と角の関係を調べます。平面で成り立つ正弦定理、余弦定理を球面上でつくるということです。

これから証明する結果を書いておきます。

$\triangle ABC$ で

$BC = a, CA = b, AB = c$

とします。なお  $a$  の値は  $\angle AOB$  の値です。

$\triangle ABC$  で次が成り立つ。

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$a, b, c$  をサイクリックにまわして

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$$

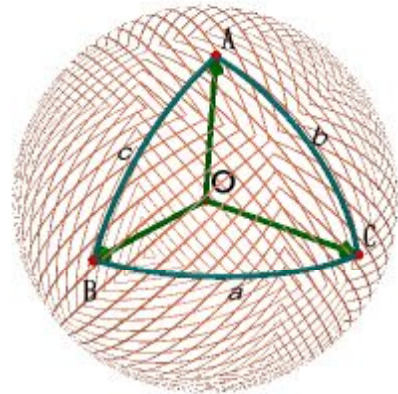
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

この3つの等式を球面三角形の余弦定理という。

もう1つは

$$\sin A / \sin a = \sin B / \sin b = \sin C / \sin c$$

です。これを球面三角形の正弦定理という。



標準的な証明は図形的な性質を用います。そのほうが図形の性質を読み取るという意味で教育的です。その証明法は

幾何学大辞典 第2巻 槇書店

をご覧ください。この辞典のうち特に第1巻と第2巻は一生使えるので持っていて損はありません。何でも書いてあるとても便利な本です。

ここでは、ベクトルの内積、外積を利用して証明します。内積、外積について使う性質は以下の等式です。この章の最後にきちんと証明しておきます。

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  を空間における単位ベクトルとする。なお、アルファベット小文字の太文字はベクトルのことです。

$$(1) \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ のなす角を } \theta \text{ とすると } |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sin \theta$$

$$(2) \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$(3) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

$$(4) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

この4つの等式を仮定した上で、余弦定理、正弦定理の証明に入ります。

余弦定理は、球面三角形の内角の定理よりすぐに出ます。

$$\cos A = \frac{(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})}{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}|} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin c \sin b}$$

より成り立つ。正弦定理は



$$\sin A = \frac{|(\overline{OA} \times \overline{OB}) \times (\overline{OA} \times \overline{OC})|}{|\overline{OA} \times \overline{OB}| |\overline{OA} \times \overline{OC}|} = \frac{|\overline{OA} \cdot (\overline{OB} \times \overline{OC})|}{\sin c \sin b}$$

$\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$  の決める平行六面体の体積を  $S$  とすると

$$S = |\overline{OA} \times (\overline{OB} \times \overline{OC})| \quad \text{であるから}$$

$$\sin b \sin c \sin A = S$$

$S$  は一定の値であるから

$$\sin b \sin c \sin A = \sin c \sin a \sin B = \sin a \sin b \sin C = S \quad \dots \textcircled{1}$$

①の辺々を  $\sin a \sin b \sin c$  で割ったものが正弦定理である。実際は①の方が使われる場合が多く、 $S/6$  の値を球面三角形  $ABC$  の体積要素と呼ぶ。平面における正弦定理も①の形で書くと対応する  $S$  の値は平行四辺形の面積である。

次に、変形で用いた、

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  を空間における単位ベクトルとする。

(1)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  のなす角を  $\theta$  をすると

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \cos \theta, \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sin \theta$$

(2)  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

(3)  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

(4)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

の証明をする。なお、手っ取り早く証明を知りたい場合はベクトル解析の教科書を参考にしてもらおうとして、ここでは、高校程度の知識だけを仮定して、外積の定義からはじめる。

2つのベクトル  $\mathbf{a} = (a, b, c), \mathbf{p} = (p, q, r)$  が与えられたとき、 $\mathbf{a}, \mathbf{p}$  に垂直なベクトルを求める。

ベクトルを  $(x, y, z)$  とおき、

$$ax + by + cz = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$px + qy + rz = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

より、 $x : y : z$  を求める。

①× $r$ −②× $c$ より

$$(ar - cp)x + (br - cq)y = 0$$

$$\therefore x : y = (br - cq) : (cp - ar)$$

同様に  $y$  を消去すると  $x : z = (br - cq) : (aq - bp)$

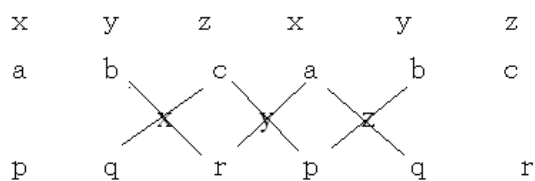
$$\therefore x : y : z = (br - cq) : (cp - ar) : (aq - bp)$$

$\mathbf{a}, \mathbf{p}$  に対して、 $\mathbf{a}, \mathbf{p}$  に垂直なベクトルが求まりそのベクトルは

$$(br - cq, cp - ar, aq - bp)$$

である。このベクトルが重要なのであるが、このベクトルが与えられた2つのベクトルの成分  $a, b, c, p, q, r$  からどのように表せるかを見ておこう。

右図のように、与えられた 2 つのベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{p}$  の成分を  $a, b, c$  と  $p, q, r$  と書き、その下に  $a, p$  の成分と  $b, q$  の成分と  $c, r$  の成分とをクロスに掛けて引いたものが  $\mathbf{a} \times \mathbf{p}$  の成分である。このベクトルを  $\mathbf{a} \times \mathbf{p}$  と表し、 $\mathbf{a}, \mathbf{p}$  の外積と呼ぶ。



次の 2 つのベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{p}$  の決める平行四辺形の面積  $S$  を求める。

$\mathbf{a}, \mathbf{p}$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$\begin{aligned} S^2 &= (|\mathbf{a}| |\mathbf{p}| \sin \theta)^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{p}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(p^2 + q^2 + r^2) - (ap + bq + cr)^2 \\ &= (br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2 \end{aligned}$$

この計算より、ベクトル  $\mathbf{a} \times \mathbf{p}$  の大きさが  $\mathbf{a}, \mathbf{p}$  の決める平行四辺形の面積であることが分かった。ベクトルは向きと大きさだけで決まるから、あとは垂直な方向のどちら向きかが分かればよい。そこで

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0),$$

$$\mathbf{p} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

として  $\mathbf{a} \times \mathbf{p}$  を調べてみよう。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{p} = (0, 0, \sin \theta)$$

より、 $\mathbf{a} \times \mathbf{p}$  は  $\mathbf{a}$  から  $\mathbf{p}$  に回転したとき右ねじの進む方向であることが分かるとおもう。これは、通常右手の親指、人差し指、中指を伸ばしたとき、 $\mathbf{a}$  を親指、 $\mathbf{b}$  を人差し指としたときの中指の向く方向という。

これで  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  が完全に分かりました。

次に

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$$

のとき、 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  について調べます。

3 つのベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  の決める平行 6 面体の体積を  $V$ 、2 つのベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}$  のなす角を  $\theta$  とすると

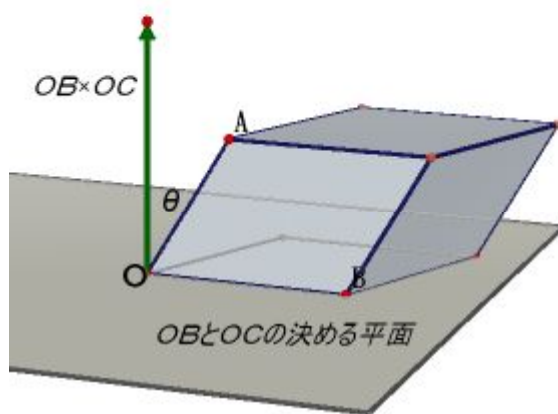
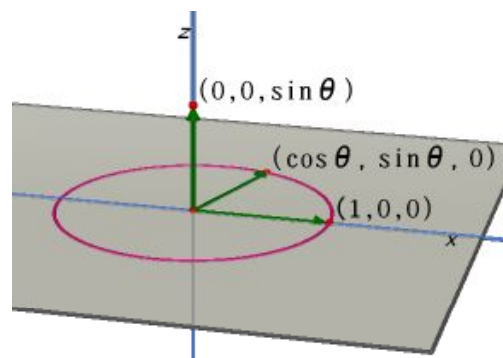
$$V = (\mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ の決める平行四辺形の面積})$$

$$\cdot OA \cdot \cos \theta$$

$$= |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| |\mathbf{a}| \cos \theta = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

なお、符号は  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  の決める平面に関して  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  が同じ側にあれば正、反対側にあれば負になります。

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  は  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  の決める平行 6 面体の体積になるので、



$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$   
 となります。

(3) の前に

$$(4) \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

を証明します。

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  は  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  に垂直だから

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = k \mathbf{b} - l \mathbf{c}$$

と表せます。さらに  $\mathbf{a}$  と垂直だから

$$(k \mathbf{b} - l \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = 0$$

$$\therefore k : l = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) : (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

したがって、

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

$$= t \{ (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \} \dots \textcircled{1}$$

後は  $t$  を定めればよい。

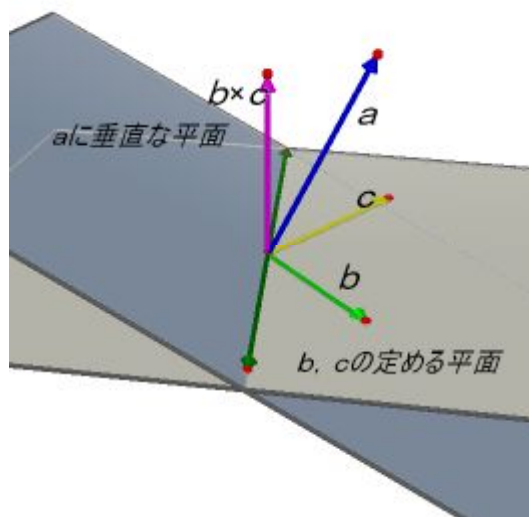
$$\mathbf{a} = (1, 0, 0), \mathbf{b} = (1, 0, 0),$$

$$\mathbf{c} = (0, 1, 0) \text{ とおけば}$$

$$\textcircled{1} \text{の左辺} = (0, -1, 0)$$

$$\textcircled{1} \text{の右辺} = t (0, -1, 0)$$

より  $t = 1$  を得る。したがって (4) の等式が成り立つ。



(4) の証明は、パソコンを使い次のように確認するのもよい方法です。証明は内容を自分の中に納得してしまう込むためのものです。人にもよるでしょうが、下の計算で納得できるなら自分に向いている方法で、どんどん使えばよいでしょう。

#1:  $\mathbf{x} := [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$

#2:  $\mathbf{y} := [\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}]$

#3:  $\mathbf{z} := [\mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{i}]$

#4:  $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$

#5:  $[b \cdot (d \cdot h - e \cdot g) + c \cdot (d \cdot i - f \cdot g), a \cdot (e \cdot g - d \cdot h) + c \cdot (e \cdot i - f \cdot h), a \cdot (f \cdot g - d \cdot i) + b \cdot (f \cdot h - e \cdot i)]$

#6:  $(\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$

#7:  $[b \cdot (d \cdot h - e \cdot g) + c \cdot (d \cdot i - f \cdot g), a \cdot (e \cdot g - d \cdot h) + c \cdot (e \cdot i - f \cdot h), a \cdot (f \cdot g - d \cdot i) + b \cdot (f \cdot h - e \cdot i)]$

(4) が分かれば (3) は機械的な計算です。

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \{ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \} \cdot \mathbf{d}$$

$$= \{ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \} \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$$

この等式はよく用います。2行2列の行列式を思い出すと覚えやすいでしょう。

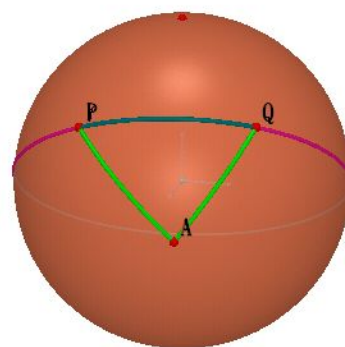
球面三角法を利用して、球面上の面白い例を紹介しま  
す。球面上に3点A, P, Qがあり,  $AP=AQ=1$   
 $\angle PAQ=90^\circ$  とします。このとき、球面三角法より、  
 $PQ=x$  とすると

$$\cos x = \cos 1 \cos 1 = (\cos 1)^2$$

計算すると

$$x = 1.2745$$

となります。



$$\#16: \text{ACOS}(\text{COS}(1)^2)$$

#17:

1.274555782

球面上でAから2点P, Qを見たときと平面上で見たときを比較してみましょう。

$AP=AQ$ であるから、平面上では $\sqrt{2} = 1.414$ となります。すなわち、Aからの見え方は見込む角のことですから、同じ長さと思える2点間の距離は球面上の方が平面上より短いのです。相対的に考えれば球面上の方が速く動いているように見えるわけです。これは、曲面の曲がり方（曲率）と関係があるのです。

さて、地球上でこの事実を確かめようとした人はいたのでしょうか。いるんですね。それはガウスです。彼は、ホーヘンハーゲンの山頂、ブロッケン山頂、インゼルスベルク山頂に測定器を設置し、距離や角を測定し、平面とは異なることを調べようとしてきました。これらの山頂間の距離は約100 kmで、地球の半径は6370 km。すなわち、半径63 cmの地球儀で考えれば1辺の長さ1 cmの球面三角形を考えたことに相当します。当然、計測結果が測量の誤差の範囲を越えず、地球が丸いという結果は出せませんでした。

ガウスは完成したものや結果がきちんと出たものしか発表しない人です。この測量の事実は彼の著書「曲面論」の最後に事実だけが述べられただけで、彼が何を考えたかは書いてありません。三角形の内角の和が $\pi$ を超えることを確かめようとしたのではないかとされています。ガウスは測量の結果が誤差の範囲を超えないことは分かっていたでしょうから、他に大きな考えがあったのかもしれませんが。

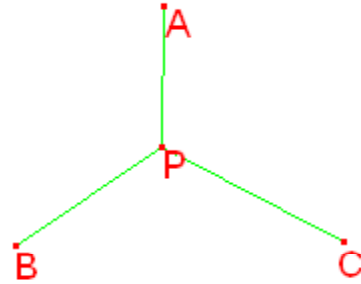
### 3. 工業立地論

球面上で幾何学を行うことは予想外の困難が付きまとうが、それらに関しては次章以降で扱うことにして、ここではアルフレッド・ウェーバーが提唱した工業立地問題を解く。ウェーバーは、1909年に出版した「工業立地論」(篠原泰三訳)の中の数学付録で次の問題を扱っている。

「3地点A, B, Cがあり, Aは原料供給地, Bは動力原料供給地, Cは消費地である。生産物zトンの生産のためにxトンの原料とyトンの動力原料が必要なとき, 工場をPに置くとするとzトンの生産物に対する輸送費は

$$R = xAP + yBP + zCP$$

である。どこにPをとれば輸送費を最小にできるか」



この問題に対して, トリチェリの方法による見事な数学的な解説がなされている。

「3都市A, B, Cが与えられてとき, 3都市を結ぶ最短の連絡網, すなわち  $PA + PB + PC$  を最小にする点Pを求めよ。」  
を Steiner 問題という。

Weber の例を挙げるまでもなく, 都市には大小があり, 3つの与えられた都市に対して, 都市に応じて重み付きの距離を考えた

「3都市A, B, Cと定数a, b, cが与えられているとき,  
 $aPA + bPB + cPC$  を最小にする点Pを求めよ。」

は現実には当然考えなければならない問題です。この問題を **Steiner-Weber 問題** という。

この問題を具体例で計算し解決しよう。

Aを東京, Bをシドニー, Cをサンフランシスコとして  
 $PA + 2PB + 3PC$  を最小にするPを求める。

```

#1: a := [-0.6200675211, 0.5249259043, 0.5830686615]
#2: θ := -34
#3: φ := 151
#4: [COS(θ°)·COS(φ°), COS(θ°)·SIN(φ°), SIN(θ°)]
#5: [-0.7250925989, 0.4019253907, -0.5591929034]
#6: b := [-0.7250925989, 0.4019253907, -0.5591929034]

#7: θ := 37 +  $\frac{46}{60}$ 
#8: φ := -122 -  $\frac{26}{60}$ 
#9: [COS(θ°)·COS(φ°), COS(θ°)·SIN(φ°), SIN(θ°)]
#10: [-0.4239654540, -0.6672043554, 0.6124472564]
#11: c := [-0.423965454, -0.6672043554, 0.6124472564]
#12: p := [COS(x)·COS(y), COS(x)·SIN(y), SIN(x)]
#13: ACOS(a·p) + 2·ACOS(b·p) + 3·ACOS(c·p)

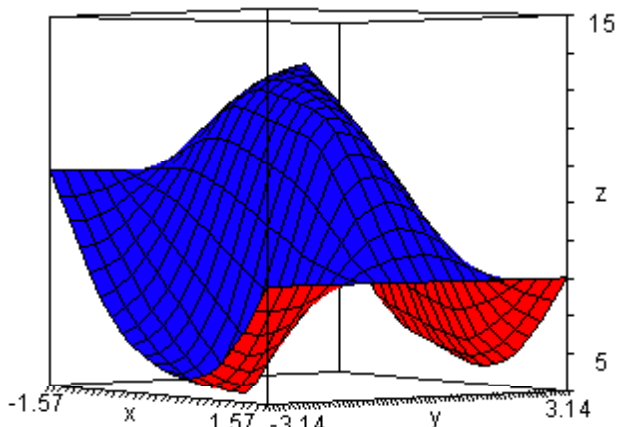
```

上の式は計算式である。a, b, cはそれぞれ、東京、シドニー、ロサンゼルスでaの座標はすでに求めてある。

$$p = (\cos x \cos y, \cos x \sin y, \sin x)$$

$$f(x, y) = \arccos(a \cdot p) + 2 \arccos(b \cdot p) + 3 \arccos(c \cdot p)$$

とにおいて  $z = f(x, y)$  のグラフを書く。そのグラフが右図である。グラフは手持ちの数式処理ソフトで簡単に描けます。後は範囲を狭めて、最小値を与える  $x, y$  を見つけるだけである。  $z$  の範囲を狭めていくと見つけやすい。

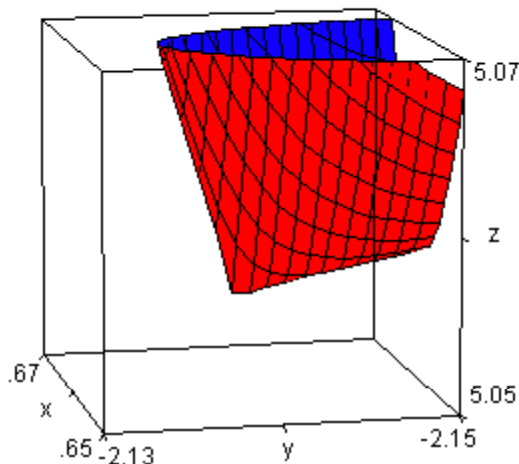


右のグラフは上のグラフを

$$\begin{aligned} 0.64 \leq x \leq 0.67 \\ -2.145 \leq y \leq -2.13 \\ 5.05 \leq z \leq 5.06 \end{aligned}$$

に範囲を限定して書いたものである。グラフより

$x = 0.66, y = -2.14$  が読み取れる。  
求める地点は北緯  $37, 8$  度,  
西経  $122.6$  度である。



グラフを利用する方法は、工業立地論の立場すなわち大体の場所を見つければよいという立場で考えるなら非常に有効な方法である。グラフを見て場所を特定するだけであるから、数学的な知識は必要なく、必要ならパソコンの精度を上げるだけである。

なお、 $P$  が  $f(x, y) = PA + 2PB + 3PC$  の最小値を与える点であるなら、 $P$  の対蹠点  $Q$  は最大値を与える点である。

実際

$$\begin{aligned} & (PA + 2PB + 3PC) + (QA + 2QB + 3QC) \\ &= (PA + QA) + 2(PB + QB) + 3(PC + QC) = 6\pi = (\text{一定}) \end{aligned}$$

である。

次に4点の場合で計算する。A (a), B (b), C (c), D (d) はそれぞれ, 東京, シドニー, ロサンゼルス, ブエノスアイレスで a, b, c の座標はすでに求めてある。d を計算し

$$p = (\cos x \cos y, \cos x \sin y, \sin x)$$

$$f(x, y) = \arccos(a \cdot p) + 2 \arccos(b \cdot p) + 3 \arccos(c \cdot p) + 4 \arccos(d \cdot p)$$

次の式が計算式である。

#1:  $a := [-0.6200675211, 0.5249259043, 0.5830686615]$

#2:  $b := [-0.7250925989, 0.4019253907, -0.5591929034]$

#3:  $c := [-0.423965454, -0.6672043554, 0.6124472564]$

#4:  $\theta := -34 - \frac{35}{60}$

#5:  $\phi := -58 - \frac{29}{60}$

#6:  $[\cos(\theta^\circ) \cdot \cos(\phi^\circ), \cos(\theta^\circ) \cdot \sin(\phi^\circ), \sin(\theta^\circ)]$

#7:  $[0.4303780382, -0.7018547749, -0.5676042803]$

#8:  $d := [0.4303780382, -0.7018547749, -0.5676042803]$

#9:  $p := [\cos(x) \cdot \cos(y), \cos(x) \cdot \sin(y), \sin(x)]$

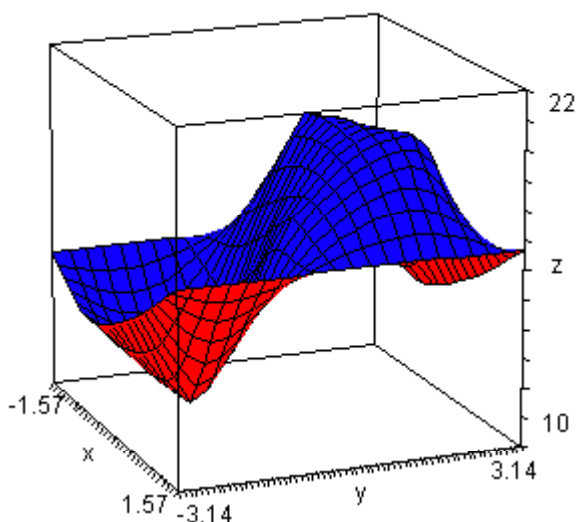
#10:  $\text{ACOS}(a \cdot p) + 2 \cdot \text{ACOS}(b \cdot p) + 3 \cdot \text{ACOS}(c \cdot p) + 4 \cdot \text{ACOS}(d \cdot p)$

$z = f(x, y)$  のグラフが右図である。上図は全体の範囲, すなわち

$$-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$$

$$-\pi \leq y \leq \pi$$

の範囲で表したもの





右図は

$$-0.28 \leq x \leq -0.25$$

$$-1.87 \leq y \leq -1.8$$

$$11.4246 \leq z$$

$$\leq 11.4248$$

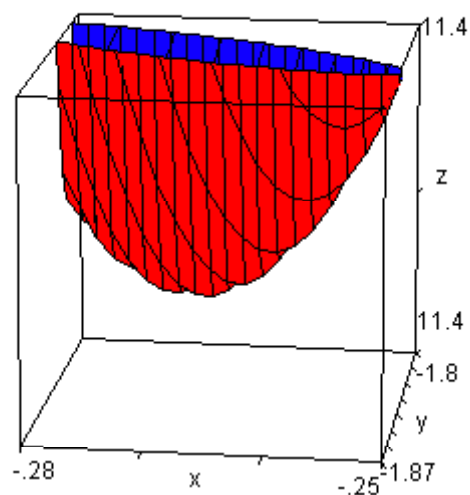
の範囲で表したものである。

グラフより

$$x = -0.265$$

$$y = -1.83$$

がおおよそその値であることがわかる。



上の計算より、求める点は

南緯 15.18度 , 西経 104.85度

であることが分かる。

なお、Weber が扱っているのは、平面の場合で、これは球面上で考えるよりはるかに扱いやすい。APの長さは  $\arccos(a \cdot p)$  を  $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$  で置き換えればよい。

## 4. 球面とユークリッド原論

球面上における幾何学は注意深くすすめる必要がある。たとえば，平面上で考えると， $\triangle ABC$ の内部に点Pを取れば

$$\angle BPC > \angle BAC$$

が成り立つ。

しかし球面上ではそうはいかない。

右の図で，球面三角形ABCで

$$\angle BPC > \angle BAC$$

が成り立つ。

しかし，B，Cの対蹠点をそれぞれB'，C'とし， $\triangle PB'C'$ で考えれば，Aは内部にあるのに

$$\angle B'PC' > \angle B'AC'$$

が成り立つ，

このようなことが起こる理由をユークリッド原論との関係から調べよう，

まず，ユークリッド原論の5つの公理を述べる。なお，ユークリッド原論全編を通して，存在に対しての一意性についての言及がない。当時は存在するなら唯一つということは当たり前のことと考えていたのであろう。ただ，現在読むときは一意性は本質的な問題であるので，ここでは一意性について書き加えている。なお，出典は

中村幸四郎他訳 「ユークリッド原論」 共立出版

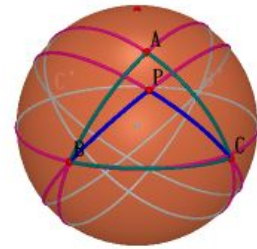
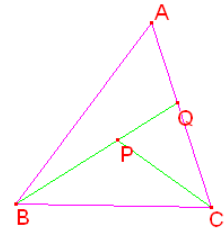
を用いた。

1. 2点を与えればその2点を通る直線が存在し唯一つに限る。
2. 与えられた線分はどちら側にも限りなく伸ばすことができる
3. 円の中心と半径で円を描くことができる
4. すべての直角はすべて等しい
5. 2直線と交わる1直線が同じ側で2直角より小さい内角の和を作るならこれらの2直線を限りなく延長させるとそれらは2直角より小さい角のある側で交わる

第5公理に関してはすでに十分議論がなされている。すなわち，第1公理から第4公理までを用いて第5公理を証明しようと多くの努力がなされたが，背理法を用いて，すなわち第1公理から第4公理までを仮定して第5公理を否定しても何も矛盾が生じないことがボリアイ，ロバチェフスキー，ガウスらによって否定的に解決された。さらに，クライン，ポアンカレらにより1から4までの公理は満たすが第5公理は満たさない，いわゆる非ユークリッドモデルが作られ矛盾が起こらないことが分かりやすく実証された。

ここではこれらの内容を扱うのではない。

非ユークリッドモデルは球面と比べるとはるかに扱いやすいモデルである。というのは，非ユークリッドモデルは，ユークリッドの第1公理から第4公理を満たす。さらに，ユークリッド原論は第5公理はできるだけ用いないで論証がされているので，ユークリッドの



原論で扱う多くの命題を非ユークリッドモデルで用いることができる。実際に命題 28 までは第 5 公理は用いていない。上で述べた平面上で考えると、 $\triangle ABC$  の内部に点  $P$  を取れば

$$\angle BPC > \angle BAC$$

が成り立つ。

は命題 21 である。当然この事実は非ユークリッドモデルでは成り立つ。

公理 1, 公理 2 は平面では当たり前の事実である。したがって、ユークリッドの原論を注意深く読まないで公理 1, 公理 2 がどのように使われているかは分からない。ここでの目的は、球面上で、ユークリッド原論の中のいくつかの命題を考えることで公理 1, 公理 2 の重要性を浮き彫りにすることである。

まず、第 1 公理

**2 点を与えればその 2 点を通る直線が存在し唯一つに限る。**

を扱う。これは平面では当たり前の事実である。しかし、球面では成り立たない。実際、点  $A$  で交わる大円は  $A$  の対蹠点で必ず交わる。

次の命題を見てみよう。

**命題 16**  $\triangle ABC$  で頂点  $C$  の外角は  $\angle A$  より大きい。

原論の証明を現代的に書き直すと次の通りです。

**証明**  $AC$  の中点を  $F$ ,  $BF$  の延長上に  $G$  を

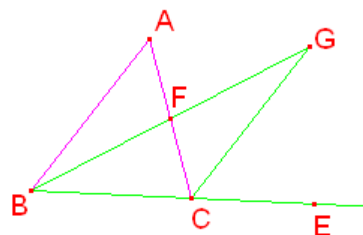
$BF = FG$  ( $\because G$  の保証は公理 2, 4)

$$\triangle ABF \equiv \triangle CGF$$

(これ以降は原論をそのまま書きます)

そこで、 $\angle BAF$  は  $\angle GCF$  に等しい。

また、 $\angle FCE$  は  $\angle FCG$  より大きい。よって、 $\angle FCE$  は  $\angle BAF$  より大きい。



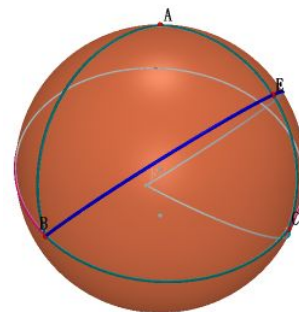
太字の部分(太字)は公理 1 が成り立たなければ成り立つ保証はできないことがわかりますか。私も、球面を考えおかしなところがあるはずだという前提で読んでやっと見つけました。

太字の根拠は、

「 $BG$  と  $BE$  は  $B$  以外では交わらないので  $F, G$  は  $BE$  に関して同じ側にある」

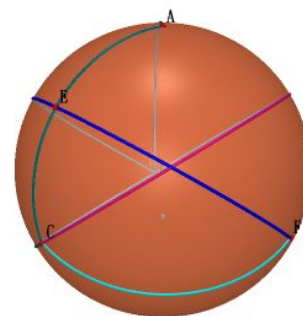
にあります。

球面上では命題 16 は成り立ちません。



分かりやすい例を挙げれば，正四面体の一つの面である正三角形ABCを考える．この正三角形は内角が $2\pi/3$ です（正四面体を真上から見ると，1つの頂点に3つの内角が集まるので内角が $2\pi/3$ である）．したがって，外角は $\pi/3$ で命題が成り立ちません．

右の図で，BFの延長上に点Eを $BF = FE$ を満たすようにとってあります．赤線は辺BCの延長で，FEと交わっています．EとFが大円BCに関して反対側にあるので，命題が成り立たないのです．



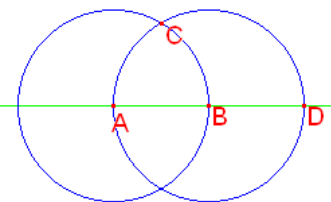
命題16が成り立たないので，それと関連する命題17，21も成り立ちません．

もう一つ例を挙げます．つぎは原論の最初の命題です．

**命題1** 線分ABを任意に与えたとき，線分ABを1辺とする正三角形を作ることができる．

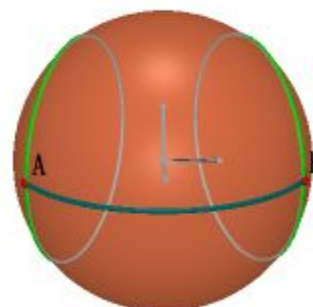
**証明** Aを中心とする半径ABの円を描き，さらにBを中心とする半径ABの円を描く．

そして，2つの円が互いに交わる点Cから2点A，Bに線分CA，CBを引けばよい．



球面では，この2つの円が交わることの保証はありません．右図を見れば分かります．

球面の場合，原論の証明のどこに問題があるかは，上の証明のままでは分かりません．原論の証明を書き直します．



### 命題1の証明

Aを中心とする半径ABの円を描く．次にBを中心とする半径ABの円を描き直線ABとの交点のうちAでないほうをDとする．**線分ABの間にDがなく，BDの間に点AがないのでADの間にBがある**．したがって，Aを中心とする円によって囲んだ図形二間してAとDは反対側にある．したがって，2つの円は交わる．

上の太字の事実が成り立たないことに起因し，それはユークリッド原論の中からは見つけられず，ヒルベルトの「幾何の基礎」の中の公理系

### 直線の順序の公理

直線上の3点のうち，ある2点は他の1点を含むに反することをを用いることとなります．

ユークリッドが原論を作るにあたり，どのように考えたかは興味あることです．公理1，2は平面と球面を区別する内容です．公理3は円を自由に描くことができることで，どの

方向にどの長さでも点を取ることができることを意味し、長さを認めている限り、どうしても必要なことです。公理4は直角はどこにあっても等しいとありますが、角度が場所が異なると異なるようではやはり幾何学になりません。ですから角度を用いる限り必要な公理です。

このようなことより、ユークリッドは原論を作るにあたり、球面を意識して作ったのではないかと私は考えています。その証拠というわけではないのですが、球面の場合では成り立たない事実は特にさらっと書いています。他の内容はここまで説明するのかということが多いにもかかわらずです。今では確かめることはできません。この原論は読めば読むほど新しい発見があるすばらしい本です。

## 5. 直線外の点と直線上の点との関係

球面の幾何では、成り立たないユークリッドの公理があるため、注意深い議論が必要である。たとえば、右図の $\triangle ABC$ の内部の点Pについて

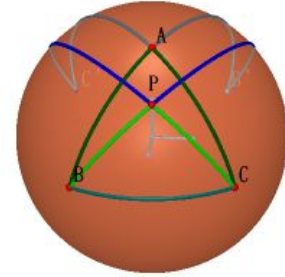
$$\angle BAC < \angle BPC$$

が成り立つが、B, Cの対蹠点をそれぞれ $B'$ ,  $C'$ とする。 $\triangle PB'C'$ で考えると点Pが三角形の内部にありながら

$$\angle BAC < \angle BPC$$

となる。

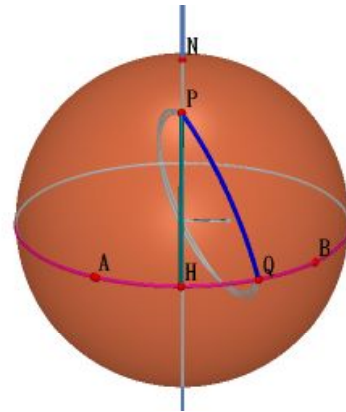
ここでは、球面上の線分を見込む角を調べる。



まず、直線ABと直線外の点Pに対して、QがAB上の動くとき $\angle PQB$ がどのように変化するかを調べるところからはじめる。

ABを赤道とみると調べやすい。Nを直線ABの極とする。PからABに下した垂線の足は2つあり、それをH, Kとする（垂線は直線PNである）。

ここで、 $PH \leq PK$ とする。なお等号が成り立つのはPが直線ABの極のとき。そのときは垂線が何本でも引ける。



### 命題1

点Qを直線AB上の点とする。このとき

$$PH \leq PQ \leq PK$$

が成り立つ。

### 証明

余弦定理より

$$\cos PQ = \cos PH \cos HQ$$

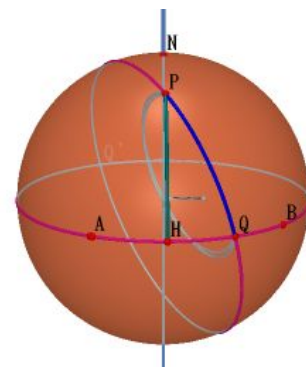
$$0 \leq HQ \leq \pi$$

より命題が成り立つ。

### 注意

PQとABのもう一つの交点を $Q'$ とすると、Qと $Q'$ は対蹠点である。したがって、

$$PQ + PQ' = \pi$$



が成り立つ.

**命題 2** 点  $Q$  を直線  $AB$  上の点とする. 線分  $HK$  の中点を  $L$  とする. このとき

$$PH \leq \angle Q \leq \pi / 2$$

が成り立つ.

**証明**

球面三角形 (以後  $\triangle$ )  $PHQ$  における正弦定理より

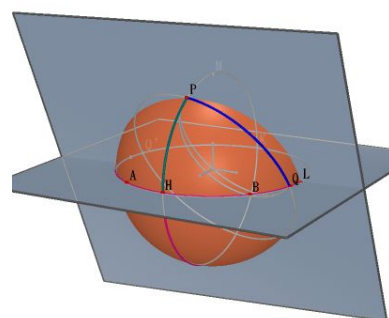
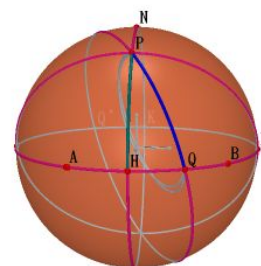
$$\sin PQ / \sin H = \sin PH / \sin Q$$

$$\therefore \sin Q = \sin PH / \sin PQ$$

$Q$  は  $PQ = \pi / 2$  のとき最小になりそのときの  $Q$  の値は

$$Q = PH$$

である. また  $H$  の対蹠点を  $K$  とすると  $PH$  と  $PK$  は補角であるから命題が成り立つ.



**注意** 球の中心を  $O$  とする.  $\angle Q$  の最小値が  $PH$  であることは, 平面  $OP L$  と平面  $HQ O$  の角を見れば明らかである.

準備は整いました. 以下, 線分を見込む角を具体的に調べる.

### (1) 線分 $AB$ を見込む角が $2\pi / 3$ の点の軌跡

steiner 点を求めるとき線分  $AB$  を見込む角が

$2\pi / 3$  の点の軌跡が必要になる.

1 辺の長さ  $a$  が

$$-1/3 \leq \cos a,$$

$$-1/2 \leq \cos a \leq -1/3$$

$$\cos a \leq -1/2$$

$\cos a = -1/3$  を満たす  $a$  は内角が  $2\pi / 3$  となる正三角形の 1 辺の長さで, そのときの  $a$  の値は

$$a \doteq 1.91 \doteq 109.47^\circ$$

である.

$\cos a = -1/2$  すなわち  $a = 2\pi / 3$  は最大に正三角形. すなわち 3 点が大円上のある正三角形である.



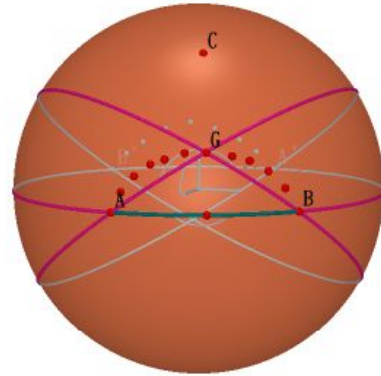
(i) 1辺の長さ  $a$  が  $-1/3 \leq \cos a$  を満たすとき

まず、 $AB$ を赤道におき、上半球で考えればよい。下半球は対称な図形になる。

$AB$ を1辺とする正三角形を $ABC$ とする。 $BC$ 、 $AC$ の垂直2等分線の交点を $G$ とすると求める軌跡は曲線 $AGB$ である。なお、曲線の点 $A$ 、 $B$ における接線と $AB$ とのなす角は $\pi/3$ である。

さらに、 $A$ 、 $B$ の対蹠点をそれぞれ $A'$ 、 $B'$ とすると、 $\angle AGB = \angle B'GA'$ である。

このことから分かるように、球の裏側にも対称な図形が現れる。



(2) 1辺の長さ  $a$  が  $-1/2 \leq \cos a \leq -1/3$  を満たすとき

これは注意深く検討する必要がある。

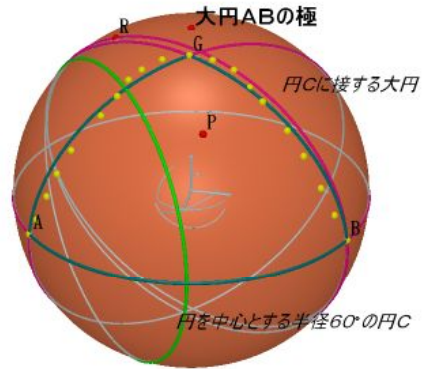
1辺の長さが  $a$  の正三角形を $ABC$ とし、 $B$ 、 $C$ 、 $CA$ の垂直2等分線の交点を $G$ とする。

当然 $\angle AGB = 2\pi/3$ であるが、 $BG$ 上にはもう1点 $AB$ を見込む角が $2\pi/3$ となる点がある。

これは後で説明する。

内角は $2\pi/3$ より大きいから、求める軌跡は右図のようになる。軌跡の $A$ 、 $B$ における接線と $AB$ とのなす角は $\pi/3$ である。

さらに、 $A$ を中心とする半径 $\pi/3$ の円を $C$ とすると、 $B$ を通り円 $C$ に接する測地線に軌跡は接する。なお、(i)と同様に裏側にも対称な図形が現れる。



(3) 1辺の長さ  $a$  が  $\cos a \leq -1/2$  を満たすとき

線分 $AB$ の垂直2等分線上には線分 $AB$ を見込む角が $\pi/3$ の点が存在しないことに注意する。

$A$ 、 $B$ の対蹠点をそれぞれ $A'$ 、 $B'$ とすると、求める軌跡は曲線 $AB'$ 、 $BA'$ である。なお、軌跡の点 $A$ 、 $B$ 、 $A'$ 、 $B'$ における接線と $AB$ とのなす角は $\pi/3$ である。

