

## 極端原理

数学のある種のテーマの中に現れる各要素の関係は均衡がとれているわけではありません。その中で、ある極端な要素が他の要素より優れた性質を持っている場合があります。この性質が問題を解くキーポイントになることがあります。この優れた性質を持つ要素が極端な要素である場合が多く、この解法を極端原理と呼ばれるゆえんです。

例1 四面体 $ABCD$ で次の条件を満たす頂点が存在することを証明せよ。

頂点から出ている3本の稜辺が1つの三角形の3辺になる

(1968年 IMO 第4問)

証明1 各頂点から出ている3本の稜辺の長さの和をに注目しましょう。

4つの頂点のうち、頂点 $A$ から出ている3本の稜辺の長さの和が最大として議論を進めます。すなわち、 $AB$ 、 $AC$ 、 $AD$ が三角形の3辺の長さになることを示しましょう。

もしそうでないと仮定します。

2本の稜辺の和が第3の稜辺より長くない場合が存在します。

ここでは $AD + AC \leq AB$ として話を進めましょう。

$AB + AC + AD$ が最大ですから

$$BC + BD + BA \leq AB + AC + AD \quad \text{より}$$

$$\therefore BC + BD \leq AC + AD$$

このことより

$$BC + BD + AC + AD \leq 2(AC + AD) \leq 2AB$$

一方

$$AD + BD > AB, \quad AC + BC > AB$$

より

$$AD + BD + AC + BC > 2AB$$

であり矛盾する。

以上で証明が終了しました。

別の極端原理でも証明してみましょう。

証明2  $AB$ を最長の稜辺の一つとする。このとき、 $A$ から出ている3辺または $B$ から出ている3辺いずれかは三角形を作ることができます。

これも背理法で証明しましょう。

としそうでないなら、 $AC + AD \leq AB$ かつ $BC + BD \leq AB$ をみます。

このとき

$$2AB \geq AC + AD + BC + BD = (AC + BC) + (AD + BD) > 2AB \quad \text{より矛盾します。}$$

例2  $n$ 人参加 ( $n \geq 3$ ) の競技会で、どの2名の選手も戦っており、どの試合も勝負が決している。全勝の選手がいないとき、次の条件を満たす3人A, B, Cがいることを証明せよ。

勝利数が最大の選手に注目しましょう。

解答 勝利数最大の選手の1人をAとします。Aは全勝ではないので、誰かには負けており、Bに負けているとしましょう。このとき、Bの勝利数はAの勝利数より多くはなく、BはAに勝っているのだから、Aに負けているがBには勝っている選手Cがいる。

したがって、以上のようにA, B, Cを定めればよい。

リーグ戦の星取り表を見てみましょう。全勝がいないとき、下位の成績の選手が上位に勝利しているのが必ずあります。面白いですよ。

さて、上の例題をひねると次の問題になります。

例3 ある競技会で参加選手のどの2名の選手も戦っており、どの試合も勝負が決している。これらの試合の結果から優秀選手を確定したい。選手Aが優秀選手であるための条件は次の通りである。

A選手がどの選手Bとも勝っているかまたは間接的に勝っている。ここでA選手が間接的にB選手に勝っているとは、A選手がC選手に勝ってかつC選手がB選手に勝っているようなC選手が存在することである。

このような条件のもと、優秀選手がただ1名しか存在しないならば、その優秀選手は他のすべての選手に勝っていることを証明せよ。

証明 まず必ず優秀選手が存在することを証明しましょう。当然最多勝の選手が候補になります。基本的には例2と同様です。

参加選手の数は有限であるから必ず最多勝の選手が存在します。Aを最多勝の選手の一人とする。

もし、AがA以外のすべての選手に勝っているなら当然Aが優秀選手である。

もしそうでないとき、Aは $B_1, \dots, B_k$ には勝っているが、 $B_{k+1}, \dots, B_n$ には負けているとする。ここで任意の $B_j$  ( $k+1 \leq j \leq n$ ) をとる。 $B_j$ は $B_1, \dots, B_k$ のすべてに勝つことはできない。なぜなら $B_j$ はAより少なくとも一試合多く勝つことになってしまうからである。したがって、Aが $B_i$ に勝ち、かつ $B_i$ が $B_j$ に勝つという $B_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) が必ず存在する。ゆえにAは間接的に $B_j$ に勝っている。 $B_j$ の任意性よりAは優秀選手である。

次に、優秀選手がただ1名なら、その選手は他のすべての選手に勝っていることを証明します。

Aが唯一の優秀選手であるとする。もしAが他のすべての選手に勝っているわけではないとし、背理法で矛盾を示しましょう。

Aは $B_1, \dots, B_k$ には勝っているが $B_{k+1}, \dots, B_n$  ( $k < n$ ) には負けているとする。前段の証明より、 $B_{k+1}, \dots, B_n$ のなかだけの局部優秀選手 $B_j$ が存在する。この $B_j$ はAに勝ち、さらにAは任意の $B_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) に勝っている。すなわち $B_j$ は間接的に $B_i$ に勝っている。

したがって  $B_j$  も優秀選手となり矛盾する。以上より、 $A$  は  $A$  以外のすべての選手に勝っていることが分かる。

例4 20名の選手よりなるテニスクラブがある。14試合のシングルスを計画した。ただし、すべての選手は少なくとも1試合には参加している。このとき、対戦している12名の選手がすべて異なる6試合が存在することを証明せよ。(1989年 アメリカ 第2問)

これは、部屋割り論法で解くのが一般的です。ここでは、極端原理を用いましょう。

証明1 第  $j$  試合に対戦する選手を  $(a_j, b_j)$  と書き、

$$S = \{ (a_j, b_j) \mid j = 1, 2, \dots, 14 \}$$

とおく。  $S$  の部分集合  $M$  に含まれる選手がすべて異なるとき、  $M$  を  $S$  の良部分集合と名付ける。

明らかに、良部分集合は存在して、高々有限個である。そこで良部分集合のうち、要素の個数が最大のものの一つを  $M_0$  とし、その要素の個数を  $r$  とする。ここでは  $r \geq 6$  を証明すればよい。

$M_0$  は最大の良部分集合である。したがって、  $M_0$  の中にいない  $20 - 2r$  名の選手間の試合はない。また、どの選手も少なくとも1試合には参加しているから  $M_0$  内の  $r$  試合以外に少なくとも  $20 - 2r$  試合行われなければならない。すなわち、試合の総数は少なくとも  $20 - 2r + r = 20 - r$  はある。もし  $r \leq 5$  とすると試合の総数は少なくとも15試合となり矛盾する。ゆえに  $r \geq 6$  が証明された。

部屋割り論法を用いるなら次のようになります。

証明2 14試合に参加するのは重複して数えれば28人で、選手は20名であるから、2試合以上に出場する選手は最大8名で、そのような選手が出場する試合は最大8試合である。

したがって少なくとも  $14 - 8 = 6$  試合は1試合しか参加しない選手によって行われる。したがって証明された。

問題の中には、順序は与えられていないが、要素に順序をつけ問題を解くときもあります。

例5

(1) 平面上に  $2n + 2$  個の点があり、どの3点も同一直線上にないとする、このとき、これらの点から2点を選び、その2点を結ぶ直線が残りの  $2n$  個の点を  $n$  個ずつ2つに分けることが出来ることを証明せよ。

(2) 平面上に  $2n + 3$  個の点があり、どの3点も同一直線上になく、どの4点も同一円周上になくとする、このとき、これらの点から3点を選び、その3点の定める円が残りの  $2n$  個の点を  $n$  個ずつ2つに分けることが出来ることを証明せよ。

1つ1つ丁寧に解決していきましょう。当たり前の事実といえば当たり前ですね。

<step1> 一方の側にすべての点がある直線をつくります。

作れることはわかりますか。たとえば次のように作りましょう。

1つの点  $O$  を定め、その点から残りの点までの距離を求め、その最大値を  $R$  とするれば、定めた点

を中心として、半径がRより大きい円を描けば、円の中にすべてが含まれます。この円の外に点Pを取り、Pを通りPOに垂直な直線は条件を満たします。

<step2> 与えられた点から2点を選び、残りの点はすべて選んだ2点を通る直線の一方の側にある。次のように作りましょう。

上で作った直線をPの周りに回転し、最初に交わった点Aとします。その直線上にもう1点Bがあれば直線ABが求める直線です。なお、仮定より、3点を通ることはありません。

もし、1点Aだけなら、さらにその直線をAの周りに回転していき、最初に交わる点をBとすれば、直線ABが求めるものです。

ここまで出来れば後は一歩道です。

<step3>

- (1) は直線ABをAの周りに回転していき、n番目に交わった点を結ぶ直線を考えればよい。
- (2) 線分ABを見込むを小さい順に並べ、n+1番目の点とA、Bを通る円が求める円である。

#### 例6 (シルベスターの定理)

一直線上にはないn個の点がある。このとき、ちょうど2点だけを通る直線が存在する。

証明 平面上のn個の点を $M = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ とおく。 $A_1, A_2, \dots, A_n$ が同一直線上にないとき、任意の*i, j*に対して3点 $A_i, A_j, A_k$ が同一直線上でないような $A_k$ が存在する。ここで、 $A_k$ と直線 $A_i A_j$ の距離を

$d_{ijk} > 0$  とかく。

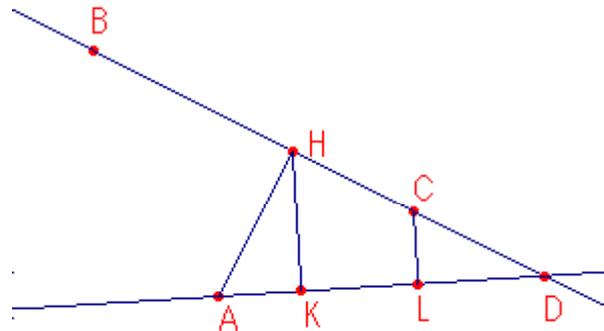
このとき  $\{d_{ijk}\}$  は有限個の正の実数よりなる集合であるから最小値が存在し、 $d_{123}$  を最小の要素とする。ここで、 $A_2, A_3, A_1$  を新しくA, B, Cとおきます(右図参照)。

直線BCが求める直線すなわち、ちょうど2点だけを通る直線であることを証明しよう。

背理法で証明します。

直線BC上にさらにもう1点Dが存在すると仮定します。Aから直線BCに下ろした垂線の足をHとすると、B, C, DのうちHに関して同じ側にある点(Hと一致してもかまわない)をC, Dとし $CH < DH$ とします。ここで、C, Hから直線ADに下ろした垂線の足をそれぞれL, Kとすると、 $CL < HK$  ( $\because DH > DC$ )  $< AH$  ( $\because \triangle AKH$ で $\angle K = 90^\circ$ )

したがって、 $d_{123}$  が最小に矛盾する。



例題 6 を対偶の形で書くと次のようになります。

例 6 の対偶

M を平面上の有限個の点よりなる集合とする。M の任意の 2 点を結ぶ直線上に必ず M の他の点を含むとき、M 内のすべての点は同一直線上にある。

どちらにしてもなんか当たり前ですけど、手の付けづらい問題です。この問題はシルベスター (Sylvester) の問題とといいます。

シルベスターが生前、提出した問題ですが約 50 年間解かれませんでした。アメリカの無名の高校教師により解かれたとき、誰も興味を示さなかったので、その名前は記録に残っていません。このエピソードは中国ではとても気に入られているみたいで、私が中国にいるときも何度も聞きました。

さて、極端原理を不存在的の証明に利用することがあります。背理法の一つで無限下降法とも呼ばれている、つぎの方法です。

1. 条件を満たすものが存在すると仮定し、最小のものを定める。
2. 1 でもとめたものより、小さいものが存在することを証明する。
3. したがって条件を満たすものは存在しない。

次の例はよく用いられています。

例 7 a は正の整数で平方数では。このとき  $\sqrt{a}$  は無理数である。

証明 p を a の奇数乗の素因数とする。  $\sqrt{a} = \frac{n}{m}$  (m, n は正の整数) で m, n は最小のもの

( $\frac{n}{m}$  は既約分数) とする。このとき、 $m^2 a = n^2$  であるから、n は p の倍数で、さらに m も p の

倍数。したがって m, n は最小に矛盾する。したがって  $\sqrt{a}$  は無理数である。

ここで述べている証明方法は次の証明で用いるのでフェルマの方法ともいいます。

例 8 方程式  $x^4 + y^4 = z^4$  を満たす正の整数 x, y, z は存在しない。

まず、次の準備をしましょう。

準備 正の整数 x, y, z が

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (x, y \text{ は互いに素,})$$

を満たすなら、x, y, z は、互いに素な整数かつ偶奇が異なる (共に奇数でない) m, n (m > n) を用いて

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

と表せる。

(準備の証明) x, y が共に奇数になることはない。 (∵ 共に奇数なら  $z^2$  が  $4k+2$  となる)

また,  $x, y$  は互いに素より  $x$  を偶数,  $y$  を奇数とする.  $z$  も奇数より

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$$

$$x \text{ が偶数, } y, z \text{ が奇数より } x = 2p, z + y = 2q, z - y = 2r \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore p^2 = qr$$

①より  $z = q + r, y = q - r$  で  $y, z$  が互いに素より  $q, r$  は互いに素

$$\therefore q = m^2, r = n^2 \quad p = mn \quad (m, n \text{ は互いに素})$$

さらに,  $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$  と  $2mn$  が互いに素より  $m, n$  が共に奇数であることはない. 共に偶数ではないから, したがって  $m, n$  の偶奇は異なる.

したがって,  $x = 2mn, y = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2$  ( $m, n$  は互いに素で偶奇は異なる)

さて, 例題 8 の証明に入ろう. 準備で証明したことで以下の証明で用いることをまとめておこう.

$x^2 + y^2 = z^2$  の整数解のうち,  $z$  が最小であるものは,  $x, y$  が互いに素であるから,  $x, y$  のうち, 片方が偶数で, もう一方は奇数である. さらに  $x, y$  のうち偶数のほうは  $2mn$ , 奇数のほうは  $m^2 - n^2$  ( $m, n$  は互いに素) と表せます.

例 8 の証明  $x^4 + y^4 = z^2 \dots \textcircled{1}$  を満たす  $x, y, z$  が存在しないことを証明すれば十分である.

①を満たす解が存在したと仮定し,  $x, y, z$  をその解のうち,  $z$  が最小のものとする.  $x, y, z$  はどの 2 つも互いに素であるから

$$x^2 = 2mn, y^2 = m^2 - n^2 \quad (m, n \text{ は互いに素}) \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす  $m, n$  が存在する. ②より  $x$  は偶数より  $m, n$  のいずれかは偶数. 一方

$y^2 + n^2 = m^2$  より  $m$  は奇数. よって  $m$  は奇数,  $n$  は偶数.

ここで  $y^2 + n^2 = m^2$  で  $m, n$  は互いに素であるから

$$n = 2ab, y = a^2 - b^2, m = a^2 + b^2 \quad (a, b \text{ は互いに素}) \quad \dots \textcircled{3}$$

をみたす  $a, b$  が存在する.

一方②および  $m$  が奇数,  $n$  が偶数より

$$m = m_1^2, n = 2n_1^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

とおくことができる.

③, ④より

$$ab = n_1^2$$

一方  $a, b$  は互いの素であるから  $a = a_1^2, b = b_1^2 \quad \dots \textcircled{5}$

②, ⑤より

$$a_1^4 + b_1^4 = m_1^2$$

ここで,  $m_1 < m < m^2 + n^2 = z$

したがって,  $z$  が最小であることに反する.

例9  $a, b$  は正の整数で  $ab+1$  は  $a^2+b^2$  を割り切るものとする. このとき  $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$  はある正整数の平方であることを証明せよ.

(1988年IMO第6問)

直接平方数と証明するのは難しそうです.

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k \cdots \textcircled{1} \text{とおき, } k \text{ が平方数でないとすると矛盾するという方針で解きましょう.}$$

矛盾の導き方ですが,  $\textcircled{1}$  を満たす  $a > 0, b > 0$  で  $a+b$  が最小のものを  $(a_0, b_0)$  とすると, それより  $a+b$  が小さいものが存在するという方針で解きましょう.

証明  $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k$  とき,  $k$  が平方数でないとする. 不定方程式

$$a^2 - kab + b^2 = k \cdots (1)$$

を考えると, 明らかにこの不定方程式の整数解  $(a, b)$  は  $ab < 0$  とはならない.

なぜなら,  $ab < 0$  とすると  $ab$  は整数より  $-ab \geq 1$  となり,  $k > 0$  より  $a^2 + b^2 \leq 0$  となるからである. (1) の正数解は  $a > 0, b > 0$  または  $a < 0, b < 0$  である.

$(a_0, b_0)$  を (1) の解のうちで  $a > 0, b > 0$  を満たしかつ  $a+b$  が最小のものとする. 対称性より  $a_0 \geq b_0$  としても差し支えない.  $k$  と  $b_0$  を固定して (1) を  $a$  の2次方程式とみる. 明らかにこの2次方程式は  $a_0$  を解としてもつ. 他の解を  $a'$  とおく. 解と係数の関係より

$$a_0 + a' = kb_0 \cdots (2)$$

$$a_0 a' = b_0^2 - k \cdots (3)$$

(2) より  $a'$  は整数である. また,  $k$  は平方数でないから (3) より  $a' \neq 0$  である. したがって  $(a', b_0)$  も不定方程式 (1) の解であり  $b_0 > 0$  をみたすから  $a' > 0$  である. 以上のことより

$$a' = \frac{b_0^2 - k}{a_0} \leq \frac{b_0^2 - 1}{a_0} \leq \frac{a_0^2 - 1}{a_0} < a_0$$

このことは  $(a', b_0)$  が (1) の解でかつ  $a' > 0, b_0 > 0$  をみたしさらに  $a' + b_0 < a_0 + b_0$  である. したがって矛盾する. 以上のことにより  $k$  が平方数であることが証明された.

例9  $f(n)$  は自然数の集合  $N$  上で定義され, かつ  $N$  の値を取る関数である. どの  $n \in N$  に対しても必ず不等式  $f(n+1) > f(f(n))$  も満たすなら, 任意の  $n \in N$  に対して  $f(n) = n$  が成り立つことを証明せよ.

(1977年IMO第6問)

なかなか解きにくい問題です. 数列  $\{f(n)\}$  が単調増加列であることを読みとることが大切です.

証明 まず数列  $\{f(n)\}$  は狭義の単調増加数列であること、すなわち任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$f(n) < f(n+1) \quad \dots (1)$$

が成り立つことを証明する。

狭義の単調増加数列は次のように言い換えることができる、任意の  $k \in \mathbb{N}$  に対して  $f(k)$  は数列

$$f(k), f(k+1), f(k+2), \dots \quad \dots (2)$$

のなかで唯一の最小項である。

もしそうでないとする。  $f(k)$  が (2) の中で唯一の最小項ではなく、さらに  $k$  はこのことの起こるさいししょうのものとする。すなわち  $f(1), \dots, f(n-1)$  までは狭義単調増加とする。

このとき、  $m \geq 1$  が存在して  $f(k+m)$  が (2) の中の最小項の一つとなる。

すなわち  $x \geq k$  のとき  $f(x)$  の最小値の一つが  $f(k+m)$  ということである。

ここで、  $f(1) < f(2) < \dots < f(k-1) < f(k+m)$

であるから  $f(k+m) \geq k$  である。

$$f(k+m-1) \geq f(k+m) \geq k \quad \therefore f(f(k+m-1)) \geq f(k+m)$$

したがって、仮定と矛盾する。ゆえに数列  $\{f(n)\}$  は狭義の単調増加列である。

以下  $f(n) = n$  を証明する。

$k$  を  $f(n) = n$  が成り立たない最小の自然数とする。このとき

$$f(k) \geq k+1$$

が成り立つ。関数  $f$  の性質より

$$f(f(k)) \geq f(k+1)$$

これは仮定と矛盾する。以上で証明が終了した。