

曲面 $z = f(x, y)$ の諸量

曲面 $z = f(x, y)$, 座標曲線で表せば

$$T = (u, v, f(u, v)) \quad \cdots \textcircled{1}$$

も, 回転面と同様例としてよく扱われる.

ここでは, 曲面①の第1基本形式, 第2基本形式, 法線ベクトル, クリストッフエルシンボル, 全曲率, 平均曲率を計算する. 活用していただきたい.

なお, 以下

$$\frac{\partial f}{\partial u} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = q, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = r, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = s, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = t$$

とおく.

$$T_u = (1, 0, p)$$

$$T_v = (0, 1, q)$$

$$T_{uu} = (0, 0, r)$$

$$T_{uv} = (0, 0, s)$$

$$T_{vv} = (0, 0, t)$$

$$T_u \times T_v = (-p, -q, 1)$$

単位法線ベクトルを n とする.

$$\Delta = \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \quad \text{とおく.}$$

$$n = (-p, -q, 1) / \Delta$$

$$g_{11} = E = 1 + p^2$$

$$g_{12} = F = pq$$

$$g_{22} = G = 1 + q^2$$

$$h_{11} = L = r / \Delta$$

$$h_{12} = M = s / \Delta$$

$$h_{22} = N = t / \Delta$$

全曲率 K , 平均曲率 H は

$$K = \frac{rt - s^2}{(p^2 + q^2 + 1)}$$

$$H = \frac{r(q^2 + 1) - 2spq + t(p^2 + 1)}{(p^2 + q^2 + 1)\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{pr}{2p^2 + 1}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{qr}{2p^2 + 1}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{ps}{p^2+q^2+1} \quad , \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{qs}{p^2+q^2+1}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{pt}{2q^2+1} \quad , \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{qt}{2q^2+1}$$

曲面 $z = f(x, y)$ の例は次の通り.
固有 2 次曲面では

1, 楕円放物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

座標曲線は $(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2})$ となる.

2. 双曲放物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

座標曲線は $(u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2})$ となる.

それぞれの具体的な曲面の形は本文にあります.