

## 4. 曲面の全曲率と平均曲率

前の章で曲面  $f(u, v)$  上の点  $P$  における法曲率  $k_n(du, dv)$  の定義をしました。  $k_n(du, dv)$  は点  $P$  における方向ベクトル  $(du, dv)$  が与えられれば定まる値です。ベクトル  $(du, dv)$  は、微分幾何独特の使い方で、ベクトル  $f_u, f_v$  の係数が  $du, dv$  であるベクトル  $f_u du + f_v dv$  のことで、 $du = a, dv = b$  とおいてベクトル  $a f_u + b f_v$  方向の法曲率が  $k_n(a, b)$  と考えればよい。ここで、前の章のまとめを書いておきましょう。第1基本形式、第2基本形式がそれぞれ、

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

である曲面の点  $P$  における方向ベクトル  $(du, dv)$  の法曲率  $k_n(du, dv)$  は

$$k_n(du, dv) = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

となります。この式が分かりづらければ  $a f_u + b f_v$  方向の法曲率  $k_n(a, b)$

は

$$k_n(a, b) = \frac{La^2 + 2Mab + Nb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$$

となるという意味です。

この式から、曲面の法曲率は曲面の第1基本形式と第2基本形式で完全に決まることがわかる。

曲面上の与えられた点  $P$  における法曲率は方向が変われば変化します。その法曲率の最大値、最小値を主曲率といい、主曲率を与える方向を主方向といいます。法曲率の最大値、最小値をそれぞれ  $k_1, k_2$  とするとき、

$$K = k_1 \cdot k_2$$
$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

で  $K, H$  を定義し、 $K, H$  をそれぞれ曲面の点  $P$  における全曲率、平均曲率といいます。全曲率をガウス曲率ということもあります。曲面の単位法線ベクトル  $\vec{n}$  の向きを反対にすると、 $k_1, k_2$  の符号が変わります。  $K$  は変わりませ

んが,  $H$  は符号が逆になります .

この章の主な目的は, 曲面の全曲率  $K$ , 平均曲率  $H$  を第 1 基本形式, 第 2 基本形式の係数  $E, F, G, L, M, N$  で表し, 2 つの主方向が直交していることを示すことです .

曲面上の点  $P$  における方向ベクトル  $(a, b) = af_u + bf_v$  の法曲率を  $f(a, b)$  とおきます .

このとき

$$f(a, b) = \frac{La^2 + 2Mab + Nb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$$

の最大値と最小値を求めることになります .  $f(a, b)$  と同次形で考えるのが一般的ですが分子, 分母を  $a$  で割って  $t = \frac{b}{a}$  とおいた

$$f(t) = \frac{L + 2Mt + Nt^2}{E + 2Ft + Gt^2}$$

として最大値, 最小値を求める方がやりやすい . もちろん  $(0, 1) = f_v$  は別途調べる必要があるが, それは  $t = \infty$  のときである .

まず, 任意の  $t$  で  $f(t)$  が一定の場合を調べましょう .

$$f(t) = \frac{L + 2Mt + Nt^2}{E + 2Ft + Gt^2} = k$$

が任意の  $t$  で成り立つとき,

$$L + 2Mt + Nt^2 = kE + 2Fkt + Gkt^2$$

$$(L - kE) + 2(M - kF)t + (N - kG)t^2 = 0$$

が任意の  $t$  で成り立つから

$$L = kE, M = kF, N = kG \cdots (1)$$

(1) は

$$L : M : N = E : F : G$$

と書くこともある . (1) を満たす点を臍 (せい) 点という .

臍点のうち  $k = 0$  すなわち  $L = M = N = 0$  である点を平坦点,  $k \neq 0$  を満たす点すなわち  $L, M, N$  のうち少なくとも 1 つは 0 でない点を円点と

いう。

曲面上の点 P が臍点のときは別途考える。ちなみにこのときは最大値も最小値も同じ  $k$  であり，全曲率は  $k^2$  平均曲率も  $k$  である。さらにすべての方向が主方向になる。

以下，考えている点が臍点でない場合を考える。

$f(t)$  の最大値，最小値は

$$f(t) = \frac{L + 2Mt + Nt^2}{E + 2Ft + Gt^2} = k$$

とおけば

$$(L + 2Mt + Nt^2) = k(E + 2Ft + Gt^2)$$

$$\therefore (kG - N)t^2 + 2(kF - M)t + (kE - L) = 0 \cdots (2)$$

が実数解  $t$  を持つ  $k$  の最大値，最小値。したがって  $k_1, k_2$  は判別式  $D = 0$  の解。

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (kF - M)^2 - (kG - N)(kE - L) \\ &= (F^2 - EG)k^2 - (2FM - GL - EN)k + (M^2 - LN) = 0 \cdots (3) \end{aligned}$$

したがって，全曲率  $K$ ，平均曲率  $H$  は

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, H = \frac{GL + EN - 2FM}{2(EG - F^2)}$$

となる。すなわち，全曲率，平均曲率は共に曲面の第 1 基本形式，第 2 基本形式の係数で表せることが分かった。

ここで何点が注意点を述べる。

• (3) で  $F^2 - EG < 0$  を示す必要がある。すなわち  $EG - F^2 > 0$  であるが，これはしばしば使われる性質である。

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= (f_u \cdot f_u)(f_v \cdot f_v) - (f_u \cdot f_v)^2 \\ &= |f_u \times f_v|^2 > 0 \end{aligned}$$

また  $G = f_v \cdot f_v > 0$  であるから

$$Gt^2 + 2Ft + E > 0$$

である。

• (2) で  $k = \frac{N}{G}$  は  $t$  の 2 次式でなくなるので，別途扱う必要があるが， $k = \frac{N}{G}$  を (3) に代入すると  $\frac{D}{4} \geq 0$  より (3) の解の間かまたは解のいずれか ( $N : G = M : F$  のとき) である．

• (3) の判別式が正であることを示す必要があるがそれは次の等式による．

$$\begin{aligned} & (2FM - GL - EN)^2 - 4(F^2 - EG)(M^2 - LN) \\ &= ((EN - GL) - \frac{2F}{E}(EM - FL))^2 \\ &+ \frac{4(EG - F^2)}{E^2}(EM - FL)^2 > 0 \quad (\because P \text{ は臍点でない}) \end{aligned}$$

• 法曲率は方向に対して値が決まるので，単位円の連続関数である．極大値，極小値が最大値，最小値である．

次に，主方向が直交することを示そう．

主曲率は

$$f(t) = \frac{L + 2Mt + Nt^2}{E + 2Ft + Gt^2}$$

の最大値，最小値であった．そのときの  $t$  の値を求めその値を  $t_1, t_2$  とし

2つのベクトル  $f_u + t_1 f_v, f_u + t_2 f_v$  が直交することを示せばよい．

$$f'(t) = \frac{(FN - GM)t^2 - (GL - EN)t + (EM - FL)}{(E + 2Ft + Gt^2)^2} \dots \dots (4)$$

(分子) = 0 の  $t$  の値が最大値，最小値を与える  $t$  の値である．その  $t$  の

値を  $t_1, t_2$  とすると，

$$t_1 + t_2 = \frac{GL - EN}{FN - GM}$$

$$t_1 t_2 = \frac{EM - FL}{FN - GM}$$

2つのベクトル  $(1, t_1), (1, t_2)$  の内積は

$$\begin{aligned} & (f_u + t_1 f_v) \cdot (f_u + t_2 f_v) = E + (t_1 + t_2)F + t_1 t_2 G \\ &= E + \frac{F(GL - EN)}{FN - GM} + \frac{G(EM - FL)}{FN - GM} = 0 \end{aligned}$$

を与える．したがって，主方向は直交することが分かった．

ここで、ちょっと気になるところは (4) の分子の判別式が正になることの確認であるが、 $f(t)$  は極値を持つので、判別式が正であることが分かる。また、実際計算すると、(4) の分子の判別式はすでに確認した (3) の判別式と一致する。

次に、曲面を調べるときに用いる、曲率線について述べる。

曲面  $f$  上の曲線  $C$  が、 $C$  上のどの点でも、その点における接ベクトルがその点の主方向と一致するとき、その曲線を曲率線という。

曲面の各点が臍点のとき、どの方向も主方向であるから、曲面上の任意の曲線は曲率線である。

ここでは、曲面の各点が臍点でない場合を考える。

曲率線の満たす微分方程式を調べよう。

各点の主方向を  $f_u + tf_v = (1, t)$  とおくと、 $t$  は (4) の  $f'(t) = 0$  より

$$(FN - GM)t^2 - (GL - EN)t + (EM - FL) = 0$$

をみたく。一方、曲線  $v = v(u)$  の接ベクトルが主方向と一致するので、曲率線の微分方程式は

$$(FN - GM)t^2 - (GL - EN)t + (EM - FL) = 0 \cdots (5)$$

の  $t$  に  $\frac{dv}{du}$  を代入し

$$(FN - GM)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - (GL - EN)\frac{dv}{du} + (EM - FL) = 0 \cdots (6)$$

を得ます。方程式 (5) は 2 つの異なる実数解を持つから、2 つの曲率線の族をもつ。

微分方程式 (6) を曲率線の微分方程式と呼ぶ。なお、(6) の形では  $f_v$  の方向が扱えないので、(6) は

$$(EM - FL)du^2 - 2(GL - EN)dudv + (FN - GM)dv^2 = 0 \cdots (7)$$

と表すことのほうが多い。

命題

臍点を含まない曲面上で、座標曲線が曲率線である必要十分は  $F = M = 0$  である。

証明

座標曲線が曲率線であることは、 $f_u, f_v$  がそれぞれ主方向であるという意味である。

$F = M = 0$  のとき、微分方程式 (7) は

$$(GL - EN)dudv = 0$$

$GL - EN = 0$  とすると  $E : G = L : N$  より  $E : F : G = L : M : N$  となり、臍点で仮定に反する。したがって、 $GL - EN \neq 0$

ゆえに、曲率線は  $du = 0, dv = 0$  であるから、座標曲線  $u$  線、 $v$  線が曲率線である。

逆に、座標曲線  $u$  線、 $v$  線が曲率線するとき、 $du = 0, dv \neq 0$  および  $dv = 0, du \neq 0$  が微分方程式 (3) の解であるから

$$EM - FL = 0, FN - GM = 0$$

すなわち、

$$E : F = L : M, F : G = M : N$$

ここで、もし  $F \neq 0$  とすると  $E : F : G = L : M : L$  となり臍点でないことに反する。したがって  $F = 0$ 。

さらに、 $EG - F^2 > 0$  より  $E \neq 0, G \neq 0$ 。

したがって  $M = 0$  を得る。

例

回転面

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, g(u))$$

の座標曲線  $u$  線、 $v$  線は曲率線である。実際

$$f_u = (\cos v, \sin v, g'(u))$$

$$f_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

$$f_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$$

より,

$$F = f_u \cdot f_v = 0$$

また,  $n = f_u \times f_v$  より

$$f_{uv} \cdot n = (f_{uv}, f_u, f_v) = 0$$

であるから  $M = 0$  である.

座標曲線が曲率線であるとき, その曲線による曲面の媒介変数表示を曲率線座標と呼ぶ. 次の章で, 曲率線座標が存在したとして, 曲面を調べるのであるが, この曲率線座標が常に存在するかは重要な問題である. この問題に関して次の命題が成り立つ.

命題

曲面が臍点を持たないならば, 各点の周りに曲率線座標が存在する.

最後に臍点の場合を調べましょう.

第1基本形式, 第2基本形式が

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

について, 点Pで

$$L = kE, M = kF, N = kG$$

すなわち

$$L : M : N = E : F : G$$

が成り立つとき, 点Pを臍(せい)点といいます. 臍点のうち  $k = 0$  すなわち  $L = M = N = 0$  である点を平坦点,  $k \neq 0$  を満たす点すなわち  $L, M, N$  のうち少なくとも1つは0でない点を円点といいます.

点Pが臍点のとき, 点Pにおける法曲率はどの方向も一定で, どの方向も主方向になります.

まず, 平面はどの点も平坦点であることは明らかです. 球面がどの点も円

点であることを示しましょう。

例

球面の第 1 基本形式と第 2 基本形式を求める。

原点を中心とする半径  $r$  の球面は

$$f(u, v) = r(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

と表せる。

$$f_u = r(-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$$

$$f_v = r(-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

$$f_{uu} = r(-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

$$f_{uv} = r(\sin u \sin v, -\sin u \cos v, 0)$$

$$f_{vv} = r(-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, 0)$$

$$\vec{n} = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

$$E = r^2, F = 0, G = r^2 \cos^2 u$$

$$L = r, M = 0, N = r \cos^2 u$$

ちなみに，回転面なので，座標曲線が曲率線です。

以上の計算より，球面上のすべての点で臍点(円点)であることが分かる。

なお，曲率は

$$K = \frac{1}{r^2}$$

である。

さて，平面は各点が平坦点，球面は各点が円点であることが分かりました。それでは逆はどうかは興味ある問題である。すなわち，各点が平坦点なら平面で，各点が円点なら球面が成り立つかということです。この問題は，次の命題で示す通り正しいことが分かる。。

命題

(1) 曲面  $f(u, v)$  の第 2 基本形式が恒等的に 0 すなわち  $L = M = N = 0$  のとき，曲面  $f(u, v)$  は平面である。

(2) 曲面  $f(u, v)$  の第 2 基本形式が第 1 基本形式の定数倍であるとき，すなわち

$$L(u, v) = k(u, v)E(u, v), M(u, v) = k(u, v)F(u, v), N(u, v) = k(u, v)G(u, v)$$

のとき, 曲面  $f(u, v)$  は球面である.

証明

曲面  $f(u, v)$  の単位法ベクトルを  $\vec{n} = \vec{n}(u, v)$  とする.

$$(1) L = f_{uu} \cdot \vec{n} = -f_u \cdot \vec{n}_u = 0$$

$$M = f_{uv} \cdot \vec{n} = -f_u \cdot \vec{n}_v = -f_v \cdot \vec{n}_u = 0$$

$$N = f_{vv} \cdot \vec{n} = -f_v \cdot \vec{n}_v = 0$$

が成り立つ.

さらに  $\vec{n}$  は単位ベクトルであるから

$$\vec{n}_u \cdot \vec{n} = 0, \vec{n}_v \cdot \vec{n} = 0$$

も成り立つ. したがって,

$$\vec{n}_u \cdot f_u = 0, \vec{n}_u \cdot f_v = 0$$

$$\therefore \vec{n}_u = \vec{0}$$

同様に

$$\vec{n}_v = \vec{0}$$

したがって,  $\vec{n}$  は定ベクトルである.

$$d(f \cdot \vec{n}) = df \cdot \vec{n} = 0$$

ゆえに,  $f \cdot \vec{n} = (\text{定数})$

$$f(u, v) \cdot \vec{n} = f(u_0, v_0) \cdot \vec{n}$$

$$\therefore (f(u, v) - f(u_0, v_0)) \cdot \vec{n} = 0$$

したがって,  $f(u, v)$  は平面である.

(2) この証明では曲面の法線ベクトル  $\vec{n}$  はベクトル記号を用いず  $n$  と表す.

$$L(u, v) = k(u, v)E(u, v), M(u, v) = k(u, v)F(u, v), N(u, v) = k(u, v)G(u, v)$$

とおく .

$$L = -f_u \cdot n_u, E = f_u \cdot f_u \text{ および } L = kE \text{ より}$$

$$(n_u + kf_u) \cdot f_u = 0$$

同様にして

$$(n_u + kf_u) \cdot f_v = (n_v + kf_v) \cdot f_u = 0, (n_v + kf_v) \cdot f_v = 0$$

さらに ,

$$(n_u + kf_u) \cdot n = 0, (n_v + kf_v) \cdot n = 0$$

であるから

$$n_u + kf_u = 0, n_v + kf_v = 0 \cdots (A)$$

この式をそれぞれ  $v, u$  で偏微分すると

$$n_{uv} + k_v f_u + k f_{uv} = \vec{0}, n_{vu} + k_u f_v + k f_{vu} = \vec{0}$$

この2式より

$$k_v f_u = k_u f_v$$

$f_u, f_v$  は1次独立であるから

$$k_u = k_v = 0$$

したがって ,  $k(u, v)$  は定数 .

さらに (A) より

$$d(n + kf) = (n_u + kf_u)du + (n_v + kf_v)dv = \vec{0}$$

が成り立つから ,

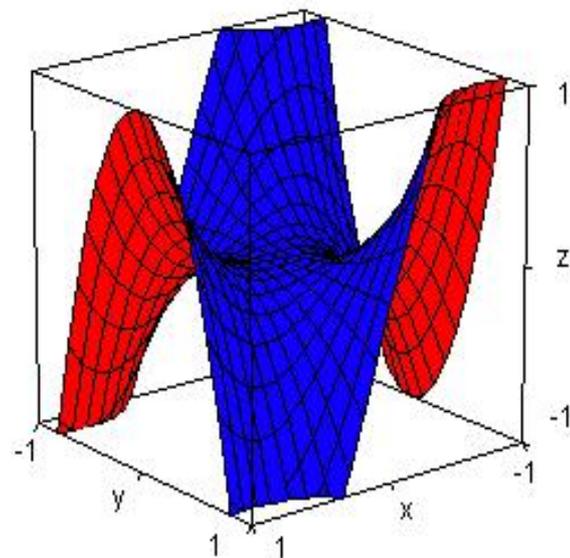
$$n + kf \text{ は定ベクトル . その定ベクトルを } kw \text{ とおくと } f - w = -\frac{n}{k}$$

したがって

$$|f - w| = \frac{1}{|k|}$$

となり ,  $f(u, v)$  が球面であることが証明された .

平坦点や円点が開集合なら，その範囲で平面の一部分や球面の一部分ですが，臍点が孤立しているとき，扱いが難しくなります．たとえば，猿の鞍と呼ばれる曲面  $z = x^3 - 3xy^2$  . 原点は平坦点です．原点の周りのこの曲面の状況を調べようとするとうまくいきません．



最後に，全曲率の図形的意味を考えよう．

曲面の全曲率は，その点における主曲率の積で定義している．すなわち，一番急な方向と緩やかな方向の法曲率の積がその点の全曲率です．たとえば主曲率の最大値，最小値がそれぞれ  $10, 1$  の点と  $5, 2$  の点の全曲率は同じになります．全曲率が同じであることの図形的な意味を考えることも必要なことです．

点  $P$  が曲面上を動くとき，曲がり方が急なら単位法線ベクトルの先端の動きが大きいし，曲がり方が緩やかなら単位法ベクトルの先端の動きが小さい．この点に注目し，全曲率を見直します．

点  $P$  を曲面  $f(u, v)$  上の点とし，点  $P$  を含む  $f(u, v)$  上の十分小さな領域  $U$  から原点を中心とする単位球面  $S^2$  への写像  $\sigma$

$$\sigma : U \longrightarrow S^2$$

を次のように定義する．

$U$  上の点  $P$  に対して，点  $P$  における単位法線ベクトルを  $n$  とし， $n$  の始点を原点としたときの終点を対応させる．

この写像  $\sigma$  を曲面の球面表示またはガウス写像という .

写像  $\sigma$  は曲面の曲がりの方急ならたくさん動き , 緩やかなら余り動きません . そこで ,  $\sigma$  によって , 曲面上の  $P$  の周りの微小部分とその  $\sigma$  による像の面積の比に注目します .

点  $P$  の周りの微小部分の面積は  $f_u, f_v$  の定める平行四辺形面積です . 一方 ,  $S^2$  の  $\sigma(P)$  における微小部分の面積は  $\sigma_u, \sigma_v$  の定める平行四辺形面積です . ここで ,  $\sigma_u = n_u, \sigma_v = n_v$  です .

$f_u, f_v$  の定める平行四辺形面積はベクトル  $f_u \times f_v$  の大きさで ,  $\sigma_u, \sigma_v$  の定める平行四辺形面積は  $n_u \times n_v$  の大きさです .  $n_u \cdot n = n_v \cdot n = 0$  より

$n_u \times n_v$  と  $f_u \times f_v$  は平行であるから

$$n_u \times n_v = \lambda f_u \times f_v$$

と表せる . この  $\lambda$  が  $\sigma$  による面積の比です .

ラグランジュの等式より

$$(n_u \times n_v) \cdot (f_u \times f_v) = (n_u \cdot f_u)(n_v \cdot f_v) - (n_u \cdot f_v)(n_v \cdot f_u) = LN - M^2$$

$$(f_u \times f_v) \cdot (f_u \times f_v) = (f_u \cdot f_u)(f_v \cdot f_v) - (f_u \cdot f_v)(f_v \cdot f_u) = EG - F^2$$

したがって ,

$$\lambda = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

すなわち ,  $\lambda$  が全曲率となりました .

ガウス曲率は球面表示  $\sigma$  の局所的な面積の比であることが分かりました .

図形的な意味は次の通りである .

曲率線座標で考えます . 曲率線座標では  $F = 0$  より  $f_u \cdot f_v = 0$  . さらに ,  $-f_u \cdot n_v = -f_v \cdot f_u = M = 0$  より  $n_u \cdot n_v = 0$  が成り立ちます . 曲線の曲率とは , 円で曲線の曲がり方をはかることです . 同じ曲がり方を続けると円周上を動くことになり , 曲率  $k$  とは同じ曲がり方で 1 進んだときの回転角が  $k$  という意味です . 曲率線座標を取れば , 主方向が  $f_u, f_v$  です . 主曲率を  $k_1, k_2$  とすれば縦 , 横が  $f_u, f_v$  方向の 1 辺の長さ 1 の正方形の球面表示

による像は縦，横が  $k_1, k_2$  である長方形の面積で近似できる．このように考えると，全曲率が球面表示が局所的な面積の比であることが分かりやすいと思います．

例

楕円放物面

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$$

の臍点を求めよう．

$$f(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{2}\right)$$

となるので，

$$f_u = \left(1, 0, \frac{u}{2}\right), f_v = \left(0, 1, v\right),$$

$$f_{uu} = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right), f_{uv} = (0, 0, 0),$$

$$f_{vv} = (0, 0, 1)$$

単位法線ベクトルは

$$n = \frac{\left(-\frac{u}{2}, -v, 1\right)}{\sqrt{\frac{u^2}{4} + v^2 + 1}}$$

第 1 基本形式，第 2 基本形式の係数は

$$E = 1 + \frac{u^2}{4}, F = \frac{uv}{2}, G = 1 + v^2, L = \frac{1}{2\sqrt{\frac{u^2}{4} + v^2 + 1}}, M = 0,$$

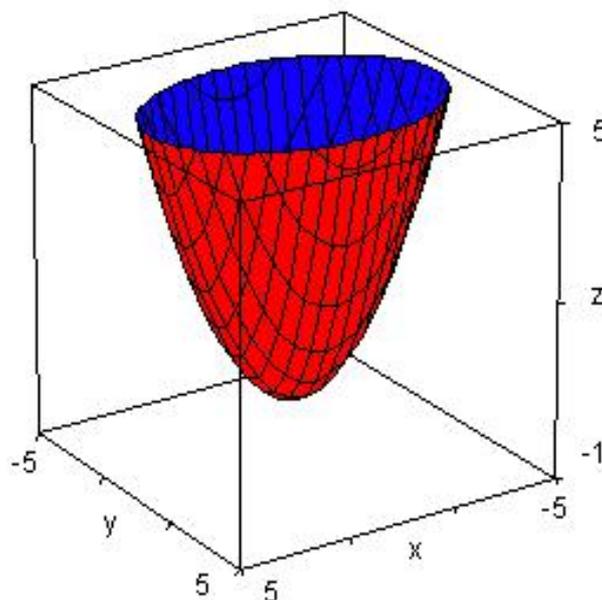
$$N = \frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{4} + v^2 + 1}}$$

全曲率  $K$  は

$$K = \frac{1}{2\left(\frac{u^2}{4} + v^2 + 1\right)^2}$$

臍点を求めよう．

$$L : M : N = 1 : 0 : 2$$



より

$$uv = 0$$

$$u = 0 \text{ のとき } v = \pm 1$$

$v = 0$  のとき  $u$  は存在しない .

したがって , 臍点は

$$f(0, \pm 1) = (0, \pm 1, \frac{1}{2})$$

である .