

接ベクトル

1. 接ベクトルの定義

ここでは多様体の接ベクトルを扱います。

ベクトル \vec{x} を表すのに基底 $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ を用いて

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n = (x_1, \dots, x_n)$$

と表しますが、基底はベクトルを表現するためのもので、基底は取り方は幾らでもありますから、基底を変えたときにどうなるかまで気をつかう必要があります。

多様体の微分可能性は局所座標を用いて定義しているのです、局所座標を用いて定義するのが分かりやすいかもしれませんがその定義では、座標変換でどうなるかを調べる必要があります。後で説明することですが、 X, Y がベクトル場のとき $[X, Y]$ がベクトル場になるのかなど案外苦労するものです。

そこで、数学者は多様体の接ベクトルを局所座標を用いない Intrinsic な定義 (接ベクトルが持っている性質による定義) を考えました。この Intrinsic な定義は後でテンソル場でも用いられます。またこの定義により、座標変換による吟味の必要性がなくなり、議論がとても楽になります。

接ベクトルの定義から始めます。

M を m 次元の多様体。 $P \in M$ に対して C_P^∞ を P における滑らかな関数全体よりなる集合とする。

定義

M を微分多様体。点 $P \in M$ における接ベクトル v とは次の 3 条件を満たす写像

$$v : C_P \longrightarrow \mathbb{R}$$

である .

$\forall f, g \in C_P, \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$(1) \quad v(f + g) = v(f) + v(g)$$

$$(2) \quad v(\lambda f) = \lambda v(f)$$

$$(3) \quad v(fg) = v(f)g(P) + f(P)v(f)$$

を満たす .

このように定義した $\{v\}$ が

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}$$

を基底とする m 次元のベクトル空間になることを示します . この定義は最初少し面倒ですがとても扱いやすい定義です . 条件 (1),(2) は明らかな場合が多く , (3) を調べるだけだからです .

まず , 次の補助命題を証明します .

補助命題

関数 f は $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ の近傍で定義されたなめらかな関数とする .

このとき , $\vec{x}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$ の近傍で定義された滑らかな関数で

$$g_i(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x}_0)$$

を満たす m 個の関数 $\{g_i\}$ でさらに \vec{x}_0 の付近の $\vec{x} = (x^1, \dots, x^m)$ で

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^m (x^i - x_0^i) g_i(\vec{x})$$

を満たすものが存在する .

証明

φ を

$$\varphi(t) = f(\vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0))$$

で定義する . このとき

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$$

$$= \varphi(1) - \varphi(0)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \varphi'(t) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0)) \\
&= \sum_1^m (x^i - x_0^i) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0))
\end{aligned}$$

したがって

$$g_i(\vec{x}) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0))$$

によって $\{g_i\}$ を定義すれば

$$g_i(\vec{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec{x}_0)$$

が成り立つので補助命題が証明された。

補助命題を用いて、点 $P \in M$ における接ベクトルが P の周りで定義された関数にどのように作用するかを調べよう。

$(U, \varphi; x^i)$ を P における許容座標系とする。 $\varphi(U)$ で考えることにより \mathbb{R}^m の $\varphi(P)$ を含む開集合で調べればよい。

点 $P \in M$ における接ベクトル v とは次の 3 条件を満たす写像

$$v : C_P \longrightarrow \mathbb{R}$$

である。

$\forall f, g \in C_P, \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$(1) \quad v(f + g) = v(f) + v(g)$$

$$(2) \quad v(\lambda f) = \lambda v(f)$$

$$(3) \quad v(fg) = v(f)g(P) + f(P)v(f)$$

を満たすものであった。

恒等写像 $f(x) \equiv 1$ に対して

$$v(f(x)) = v(1) = v(1 \cdot 1) = 2v(1)$$

より $v(1) = 0$ を得る。したがって任意の恒等写像 $f(x) \equiv k$ に対して

$$v(f(x)) = v(k) = kv(1) = 0$$

次に, $\varphi(P) = \vec{x}_0$ とする.

$\forall f \in C_{\vec{x}_0}^\infty$ に対して,

$$g_i(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x}_0)$$

を満たす $g_i \in C_{\vec{x}_0}^\infty$ が存在して

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^m (x^i - x_0^i) g_i(\vec{x})$$

と表せる. したがって,

$$v(f) = v(f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^m (x^i - x_0^i) g_i(\vec{x}))$$

$$= \sum_{i=1}^m v(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x}_0)$$

したがって, 接ベクトル v は $(v(x^1), \dots, v(x^m))$ によってきまる.

$$v(x^i) = a^i$$

とおくと,

$$v(f) = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} f$$

この式は

$$v = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$$

を意味する.

ここで,

$$v(x^i) = a^i$$

を満たす接ベクトルを調べよう.

ユークリッド空間 \mathbb{R}^m における微分を思い出そう.

\mathbb{R}^m で定義された関数 f の \vec{x}_0 における $\vec{a} = (a^1, \dots, a^m)$ 方向の微分

$D_{\vec{a}} f(\vec{x}_0)$ とは

$$D_{\vec{a}} f(\vec{x}_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\vec{x}_0 + t\vec{a})$$

$$= \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x}_0)$$

すなわち，点 \vec{x}_0 における接ベクトル v は \vec{x}_0 におけるベクトル $(v(x^1), \dots, v(x^m))$ 方向の微分と考えてよい。

微分多様体 M 上の点 P における接ベクトル全体よりなる集合を $T_P M$ と表す。 $T_P M$ は加法および定数倍を次のように定義すればベクトル空間になる。

$$\forall v, v_1, v_2 \in T_P(M), \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(v_1 + v_2)(f) = v_1(f) + v_2(f)$$

$$v(\lambda f) = \lambda v(f)$$

ただし， $f \in C_P^\infty$

ベクトル空間 $T_P M$ を微分多様体 M の点 P における接ベクトル空間という。

M が m 次元の多様体のとき，接ベクトル空間 $T_P M$ は m 次元のベクトル空間である。

実際， $(U, \varphi; x^i)$ を許容座標系とする。

このとき任意接ベクトル v は

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_P \right\}$$

を用いて

$$v = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_P$$

を表せ，もし

$$v = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_P = 0$$

のとき

$$a^i = v(x^i) = 0$$

より

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_P \right\}$$

は 1 次独立である .

2. 接ベクトル場

M を m 次元の微分多様体 . M 上の各点 P に接ベクトル空間 $T_P M$ が定義された .

M の接ベクトル場 X とは M の各点に $T_P M$ の要素を 1 つ指定したものをいう . すなわち

$$X : P \mapsto X(P) \in T_P M$$

を M 上の接ベクトル場という .

定義

X を微分多様体 M 上のベクトル場とする . M 上の任意の点 P に対して , P を含む許容座標系 $(U; x^i)$ で X を表示した式

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

において , 係数 X^i がいずれも C^∞ 級の関数のとき接ベクトル場 X を M 上の滑らかな接ベクトル場という .

滑らかな接ベクトル場の定義において , 許容座標系の取りかたによらないことすなわち許容座標系 $(V; y^\alpha)$ が $U \cap V \neq \phi$ のとき

$$X = \sum_{\alpha=1}^m Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

における Y^α が C^∞ であることは容易に証明できる .

微分多様体 M 上の滑らかな接ベクトル場全体を $\mathcal{X}(M)$ で表す . 明らかに $\mathcal{X}(M)$ は加法 , 定数倍で閉じているから 1 つのベクトル空間である .

さらに一歩進めて、接ベクトル場 X と M 上の滑らかな関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して fX を

$$fX(P) = f(P)X(P), \quad \forall P \in M$$

によって定義すれば $fX \in \mathcal{X}(M)$ である。したがって、 $\mathcal{X}(M)$ は $C^\infty(M)$ 上のベクトル空間である。

微分多様体上の接ベクトル場 $\mathcal{X}(M)$ の定義は、接ベクトルの定義と同様に許容座標系を用いない。接ベクトル場の定義のもとになる内容は次の定理である。

定理

X は微分多様体 M 上の滑らかなベクトル場とする。

このとき、任意の関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$X(f)(P) = X(P)(f)$$

によって定義することにより

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

が定義され、このように定義された $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ は $\forall f, g \in C^\infty(M)$ および $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して次の 3 条件を満たす。

$$(1) \quad X(f + g) = X(f) + X(g)$$

$$(2) \quad X(\lambda f) = \lambda X(f)$$

$$(3) \quad X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

逆にこの 3 条件を満たす写像

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

は 1 つの滑らかなベクトル場を定める。

証明

(\Rightarrow)

任意の $X \in \mathcal{X}(M)$ を M 上の任意の点 P の許容座標系 $(U; x^i)$ で表せば

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

ここで、 $X^i \in C^\infty(U)$ である。

$$X(f)|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

さらに, P は任意の点であるから $X(f) \in C^\infty(M)$.

$$\therefore X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

定理の3条件を満たすことは接ベクトルの定義より明らかである.

(\Leftarrow)

接ベクトル場では対象にしている関数は $C^\infty(M)$ であるが, P に終ける接ベクトル v では, 対象にしている関数は C_p^∞ である.

その問題を解消するためには, 単位の分割で用いた関数を用いる.

3条件を満たす

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

が定義されたとき,

$$X_P : C_P^\infty \longrightarrow \mathcal{R}$$

を次のように定義する.

任意の $f \in C_P^\infty$ に対して, P を含む開領域 $U \subset V$ で (ただし $\bar{U} \subset V$ を満たす)

$$g|_U \equiv 1, g|_{M \setminus V} = 0$$

を満たす g により

$$\bar{f} = fg$$

によって \bar{f} を定義すれば, $\bar{f} \in C^\infty(M)$ であるから,

$$X_P(f) = (X(\bar{f}))(P)$$

で定義すれば矛盾なく定義でき, さらに接ベクトルの3条件を満たすことは定理の仮定より分かる (そのことより接ベクトルが唯一つ決まるとしてもよい).

残りは, 滑らかな接ベクトル場になっていることを示せばよい.

許容座標系 $(U; x^i)$ で

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

と表したとき， $X^i = X(x^i) \in C^\infty(U)$ であるから， X の滑らかさも証明され，以上で定理が証明された．

以上の定理より，微分多様体 M 上の接ベクトル場を次のように定義することができる．

定義

微分多様体 M 上の滑らかな接ベクトル場 X とは

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

であり，かつ $\forall f, g \in C^\infty(M)$ および $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して次の 3 条件を満たすものである．

- (1) $X(f + g) = X(f) + X(g)$
- (2) $X(\lambda f) = \lambda X(f)$
- (3) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$

ベクトル場のこの局所座標系を用いない定義 (Intrinsic な定義) はベクトル場であるかどうかを調べるのにとっても便利である．

例えば，2つの接ベクトル場 $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ が与えられたとき

$$X, Y : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

であるので，当然

$$X \circ Y : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

であるが， $X \circ Y$ は接ベクトル場ではない．

実際

$$\begin{aligned} X \circ Y(fg) &= X(Y(f)g + fY(g)) \\ &= X \circ Y(f)g + Y(f)X(g) + X(f)Y(g) + fX \circ Y(g) \cdots (1) \end{aligned}$$

となる．

それでは

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$$

で定義した $[X, Y]$ は (1) から X, Y を入れ替えた式を引くことにより

$$[X, Y](fg) = [X, Y](f)g + f[X, Y](g)$$

であるから、ベクトル場である。このベクトル場 $[X, Y]$ を X, Y の交換子積という。

交換子積は、テンソル場を作るときの補正項の役割を果たすとても重要なベクトル場です。

交換子積は次の性質が成り立つ。

定理

交換子積

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$(X, Y) \longmapsto [X, Y]$$

は次の性質を持つ。

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C^\infty(M)$ に対して

$$(1) [X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$$

$$(2) [\lambda X, Y] = \lambda[X, Y]$$

$$(3) [X, Y] = -[Y, X]$$

$$(4) [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

$$(5) [fX, gY] = fX(g)Y - gY(f)X + fg[X, Y]$$

これらの証明はいずれも簡単な計算である。

テンソルに入る前に、微分多様体 M 上の点 P における接ベクトル空間 $T_P M$ の双対空間であるベクトル空間 $T_P^* M$ を復習しておこう。このベクトル空間を点 P における余接ベクトル空間という。

$\omega \in T_P^* M$ のとき ω は線型写像

$$\omega : T_P M \longrightarrow \mathbb{R}$$

である。 $v \in T_P M, \omega \in T_P^* M$ のとき、

$$\omega(v) = \langle \omega, v \rangle = \langle v, \omega \rangle$$

と内積の記号を用いる．すなわち

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T_P M \times T_P^* M \longrightarrow \mathbb{R}$$

である．この写像を双対性を表す内積と呼ぶ．

$f \in C_P^\infty$ のとき

$$df : T_P M \longrightarrow \mathbb{R}$$

を次のように定義する．

$$df(v) = v(f)$$

特に P における余接ベクトルを強調するときは $df|_P$ または $df(P)$ と表す．

$(U; x^i)$ を点 P における許容座標系とし，この許容座標系の与える自然基底を

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_P \right\}$$

とすれば，その双対基底は

$$\{dx^1|_P, \dots, dx^m|_P\}$$

となる．

$$df(P) : T_P M \longrightarrow \mathbb{R}$$

を双対基底 $\{dx^1|_P, \dots, dx^m|_P\}$ で表すと

$$df(P) = \sum_{i=1}^m f_i dx^i|_P$$

ここで，

$$f_i = df \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_P \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P)$$

したがって，

$$df(P) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(P) dx^i|_P$$

これは，微積分で学ぶ（全）微分のことで， df は各点で余接空間の要素を

対応するもの，言い方を変えれば各点での線型写像による f の 1 次近似を与えるものという見方をしましょう。

3. テンソル場

ここでは，微分多様体上のテンソル場を学びます．なぜテンソル場を学ぶかを述べます．

後で学ぶことですが， X ベクトルを Y ベクトル方向に微分するとき得られるベクトルを $\nabla_Y X$ と表す．

この微分は交換法則が成り立ちません．すなわち，微分多様体上に 3 つのベクトル場 X, Y, Z が与えられたとき，

$$\nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X$$

が 0 ベクトルではありません．したがって，この差を求めることが大切です．この値を計算すると n 次元どころか 2 次元の曲面でもとても複雑なのです．ところが，この複雑な式が，曲面の曲がり具合を表すガウス曲率で表すことができ，とてもシンプルに表せました．正しい道を進めば結果はシンプルなはずで，ガウスをこれで曲面上の微積分がものになると確信したでしょう．多分これが「ガウスが驚いた定理」といわれる理由だと思います．

話を戻しましょう．

$$\nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X$$

を n 次元の多様体でどのように扱うかが問題です．それを数学者はテンソルの概念により解決したのです．したがって，リーマン幾何を学ぶにはテンソルは避けては通れません．テンソルに不慣れな場合は，テンソルの解説をざっと読んでおきましょう．

さて本題入りましょう。

微分多様体 M 上の各点 P で接ベクトル空間 $T_P M$ および、その双対空間である余接空間 $T_P^* M$ が定義できるから、各点 P で r 階反変、 s 階共変テンソル

$$T_s^r(P) = \overbrace{T_P M \otimes \cdots \otimes T_P M}^{r \text{ 個}} \otimes \overbrace{T_P^* M \otimes \cdots \otimes T_P^* M}^{s \text{ 個}}$$

が定義できる。この点 P におけるテンソルを (r, s) 型テンソルということもある。

微分多様体 M 上の r 階反変、 s 階共変テンソル場とは、 M の各点に $T_s^r(P)$ の要素を 1 つ指定したものをいう。すなわち

$$T : P \mapsto X(P) \in T_s^r(P)$$

を M 上の r 階反変、 s 階共変テンソル場、または (r, s) 型テンソル場という。

以後、和はアインシュタイン規約に従うとする。すなわち、1 つの項の上下に同じ添字が 1 つずつあれば、その添字の動く範囲全体で和をとると定める。

定義

T を微分多様体 M 上のテンソル場とする。 M 上の任意の点 P に対して、 P を含む許容座標系 $(U; x^i)$ で X を表示した式

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

において、係数 $X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ がいずれも C^∞ 級関数のときテンソル場 X を M 上の滑らかなテンソル場という。

M 上の滑らかな r 階反変、 s 階共変テンソル場全体の作る集合を $T_s^r(M)$ と表す。

特に

$$T_0^1(M) = \mathcal{X}(M)$$

であり、 $T_1^0(M)$ すなわち滑らかな余接ベクトル場全体のなす集合を $\Lambda^1(M)$ で表す。

ここで、 $T_s^r(M)$ は加法、定数倍について閉じているからベクトル空間になることは明らかであるが、滑らかな関数をかけても含まれているから、 $C^\infty(M)$ 上のベクトル空間であることが大切である。

リーマン幾何で扱うテンソルは $(1, 2)$ 型または $(1, 3)$ 型のテンソルであるからここではテンソルは $(1, 3)$ 型として扱う。

微分多様体 M 上のテンソル場についての次の定理は重要です。

定理

T は微分多様体 M 上のなめらかな $(1, 3)$ 型テンソル場とする。このとき
3 重線型写像

$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

が次の定義によって得られる。

$\forall P \in M, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$T(X, Y, Z)(P) = T(P)(X(P), Y(P), Z(P))$$

さらに、 T は各変数 X, Y, Z に対して $C^\infty(M)$ 上線型である。すなわち、 $f, g \in C^\infty(M), X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対して

$$T(\cdots, fX + gY, \cdots) = fX(\cdots, X, \cdots) + gX(\cdots, Y, \cdots) \cdots (1)$$

を満たす、

逆に、任意の 3 重線型写像

$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

が C^∞ 上線型すなわち (1) を満たすなら、 T は M 上の $(1, 3)$ 型のただ一つのテンソル場を定める。

証明

前半は明らかであるが、逆は明らかではない。微分多様体 M 上の点 P における $(1, 3)$ 型テンソル $T(P)$ とは 3 重線型写像

$$T(P) : T_P(M) \times T_P(M) \times T_P(M) \longrightarrow T_P(M)$$

である。これは、ベクトル $T(P)(X(P), Y(P), Z(P))$ は $X(P), Y(P), Z(P)$ だけで決まることです。これが重要なことです。例えば微分を考えましょう。 $f'(P)$ の値は関数 f の P における値 $f(P)$ では決まりません。これが

ら考えるテンソルも微分を用いて定義するものばかりですから， P の値だけで決まるかどうかは決して明らかではないのです．

この定理の意味は，もし (1) が成り立つなら， $T(P)$ が P におけるベクトル $X(P), Y(P), Z(P)$ だけで決まるという意味です．それを証明します．

微分多様体 M の許容座標系 $(U; x^i)$ を用いて

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Z = Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

とおく．

$$T(X, Y, Z) = X^i Y^j Z^k T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

である．

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

は許容座標系固有のベクトルあるので $T(X, Y, Z)$ は $X^i(P), Y^j(P), Z^k(P)$ の値だけ決まる．したがって， T は各点における (1,3) 型のテンソルを定義する．

例

交換子積 $[\cdot, \cdot]$ がテンソルであるかどうかを調べよう．

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

はすでに示したように，

$$[fX, gY] = fX(g)Y - gY(f)X + fg[X, Y]$$

であるのでテンソルではありません．

別の見方をして見ましょう．

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

のとき

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \cdots (\#)$$

です．テンソルということは $[X, Y]_P$ の値は X_p, Y_p の値だけで決まるのです．交換子積を成分で表した (#) を見てみましょう．

$$\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}, \frac{\partial X^i}{\partial x^j}$$

の部分は X_P, Y_P だけでは決まりません．微分ですから周辺の値も必要です．

4. 交代テンソル場

これから，多様体 M 上の交代テンソル場を扱う．交代テンソル場を通常微分形式または外微分形式という．

交代テンソル場を学ぶ理由を説明します．

ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 における関数 f の 2 次導関数が変数変換によりどのように変換するかを確認しよう．

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial x^i}$$

であるから

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^k \partial u^l} \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial u^k} \frac{\partial^2 u^k}{\partial x^i \partial x^j} \quad \dots (\#)$$

です．つまり，(＃) の第 2 項を見れば分かるように，2 次導関数は，変数変換において，テンソルの変換をしないといってもよいし，不変性持たないといってもよい． \mathbb{R}^3 で考えている限りは，座標軸をかえないで議論できるので問題は起こりません．すなわち座標変換したときは (＃) の変換にしたがって扱えばよいのです．

しかし，多様体上では困ります．多様体の定義より座標変換による不変性が必要です．すなわち，不変性がないと定義さえできません．そこで，次に章で学ぶ共変微分が導入され活躍するのです．もちろん共変微分で多様体上の微積分の議論はこと足りるのですが，それでは，多様体上で微積分を行う方法は他にないのかということがあるのであるのです．

多様体上の交代テンソル場に限って考えれば，外部分という作用素をもちいることで，共変微分を用いなくて議論ができるのです．たとえば，

フランダース著「微分形式の理論」岩波書店

では（この本は昔から定評の高い本ですが，敷居が高く私が読みこなせる本ではありません．ここで取り上げるの資格は私にはありませんが）つぎの

ように書いています。

テンソル解析においては、込み入った添字のごたごたが、ともすれば人を迷子にしまい、テンソルによって表せる種々のタイプの量の間の大変大きな相違を見失わせることが多い。

テンソルの方法を使って、幾何学的ないし物理的状況下で、より深い不変量を発見するのは、局所的なものでさえ、全く困難だということがしばしばある。ところが外微分形式を使うと、それらが自然に、次の諸原理にしたがって出てくるように思われる。以下略

このように外微分形式の優位性を述べている。

共変微分と外微分は異なります。たとえば、多様体 M 上の関数 f の 2 次導関数であるヘッシアン $\text{Hess}(f)$ は共変微分 D を用いて $D(df)$ となります。一方 $ddf = 0$ となります。 \mathbb{R}^3 で 2 次導関数は変数変換で不変性を持っていないといいました、外微分は 2 次導関数が 0 になるように理論を作ったとっていいのではと思います。

さて、ここでは外微分作用素 d を中心に述べます。交代テンソルの内容に関して、重複する内容もあまり省略しないようにしますが、交代テンソルに不慣れな場合はざっとでいいから交代テンソルの項目を読み返すことをお勧めします。

まず、交代テンソル場の復習をしましょう。

微分多様体 M 上の r 階共変テンソル場すなわち $(0, r)$ 型テンソル場

$$T : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_r \longrightarrow C^\infty$$

のうち、 $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対して

$$T(\cdots, X, \cdots, Y, \cdots) = -T(\cdots, Y, \cdots, X, \cdots)$$

を満たすときこのテンソル場 T を r 階交代テンソル場または r 次 (外) 微分形式という．特に 1 次微分形式を Pfaff 形式と呼ぶ．

M 上の r 次微分形式全体のなす集合を $\wedge^r(M)$ と表す．特に

$$\wedge^0(M) = C^\infty(M)$$

で定める．なお，

$$\wedge^1(M) = T_1^0(M)$$

である． M を m 次元多様体とすると $m + 1$ 次以上の次数の微分形式は存在しない．そこで， M 上の微分形式全体の集合を

$$\wedge(M) = \bigoplus_{i=0}^m \wedge^i(M)$$

で定義する，

許容座標系 $(U; x^1, \dots, x^m)$ を用いれば $T_P^*(M)$ の基底は $\{dx^1, \dots, dx^m\}$ であり， U における $\wedge^p(M)$ の基底は

$$\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \mid i_1 < \dots < i_p\}$$

である．したがって $\wedge^p(M)$ の任意の要素 T は U 上で

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1 < \dots < i_p} T_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} T_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \end{aligned}$$

となる．上の第 1 式がわかりやすいかもしれないが，アインシュタイン規約にしたがう第 2 式もしばしば用いられる．意味は i_1, \dots, i_p は 1 から m まで動き， i_1, \dots, i_p の中に同じものがあれば

$$T_{i_1 \dots i_p} = 0$$

である．

次の性質は，交代テンソル場を理解するのに役に立つ．

$$X_i = X_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

のとき

$$T = \sum_{i_1 < \dots < i_p} T_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

なら

$$\begin{aligned}
& T(X_1, \dots, X_p) \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_p} T_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}(X_1, \dots, X_p) \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_p} T_{i_1 \dots i_p} \begin{vmatrix} X_1^{i_1} & \dots & X_p^{i_1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ X_1^{i_p} & \dots & X_p^{i_p} \end{vmatrix} \dots (\#)
\end{aligned}$$

この式が成り立つのは

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_p}$$

だからです。

式 (#) は優れものです。交代テンソル場の理解を大いに助けてくれるのではないのでしょうか。もちろん，交代テンソル場の理解に困るようなら，微分形式の定義として (#) を採用しても問題はありません。

(#) を定義にすれば，(#) で定義された T が交代テンソル場であることを示すのはとても簡単です。

実際

$$T(\dots, X_i + Y_i, \dots) = T(\dots, X_i, \dots) + T(\dots, Y_i, \dots)$$

や，任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$T(\dots, fX, \dots) = fT(\dots, X, \dots)$$

および

$$T(\dots, X, \dots, Y, \dots) = -T(\dots, Y, \dots, X, \dots)$$

を示せばよいがこれらは行列式の定義からすぐ分かります。

次に外微分を定義する。これが大切な作用素です。

$\wedge(M)$ で定義される外微分は次の命題による。

命題

微分多様体 M 上には次の 4 条件を満たす写像

$$d: \wedge(M) \longrightarrow \wedge(M)$$

がただ一つ存在する .

(1) d は \mathbb{R} 上線型写像である . すなわち , $\forall T, S \in \wedge(M), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$d(T + S) = dT + dS, \quad d(\lambda T) = \lambda dT$$

が成り立つ .

(2) $\forall f \in \wedge^0(M) = C^\infty(M)$ に対して , df は f の全微分 .

(3) $\forall T \in \wedge^r(M), \forall T' \in \wedge(M)$ に対して

$$d(T \wedge T') = dT \wedge T' + (-1)^r T \wedge dT'$$

が成り立つ .

$$(4) \quad d^2 = d \circ d = 0$$

証明

許容座標系 $(U; x^i)$ で考える .

(一意性)

d の線形性より , 単項式 (各項) に対して示せばよい .

d が上記の 4 条件を満たす作用素とする .

$$T = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \quad (f \in C^\infty(U))$$

に対して (4) より

$$d(dx^i) = 0$$

であるから , (3) より

$$dT = df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

とただ一通りに決まる .

(存在)

$$T = f \text{ のとき } dT = df.$$

$$T = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

のとき

$$dT = df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

で d を定義するとき (1),(2),(3),(4) を満たすことを示せばよい.

(1),(2) は明らかである .

(3) を示す .

$$T = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, T' = g dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}$$

のとき

$$\begin{aligned} d(T \wedge T') &= d(fg) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s} \\ &= (df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}) \wedge (g dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}) \\ &\quad + (-1)^r f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \wedge (dg \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}) \\ &= dT \wedge T' + (-1)^r T \wedge dT' \end{aligned}$$

したがって (3) が示された .

次に (4) を示す .

$$\begin{aligned} dT &= df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \\ &\quad \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \end{aligned}$$

したがって ,

$$\begin{aligned} d(dT) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} \right) dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上で証明が終了した .

さて、外微分 d は定義したがその定義は

$$T = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \quad (f \in C^\infty(U))$$

に対して

$$dT = df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

で与えるという許容座標系を用いたもので Intrinsic ではない. 本稿の大きな流れである座標系によらない定義が必要である . それが次の命題である .

命題

$$T \in \wedge^p(M), X_1, \dots, X_{p+1} \in \mathcal{X}(M)$$

に対して

$$\begin{aligned}
& dT(X_1, \dots, X_{p+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i(T(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1})) \\
&+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} T([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1})
\end{aligned}$$

なお, \hat{X}_i は X_i を除くという意味である.

この命題が計算等で用いられることはあまりない. ただ, この命題から外微分作用素 d が許容座標系の取り方に関係ないことが分かる.

証明

右辺が $p+1$ 階の交代テンソル場 ($p+1$ 次の微分形式ということの方が多
い) であることを示し, その後両辺を許容座標系を用いて

$$dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}}$$

の 1 次結合で表し, その係数が等しいことをしめす.

まず, 右辺が交代テンソル場であることを調べよう.

右辺を

$$S(X_1, \dots, X_{p+1})$$

とおく.

$$S(\dots, X_i + Y_i, \dots) = S(\dots, X_i, \dots) + S(\dots, Y_i, \dots)$$

および,

$$S(\dots, X_i, \dots, X_j, \dots) = -S(\dots, X_j, \dots, X_i, \dots)$$

はわかりやすい. ここでは, $f \in C^\infty(M)$ のとき

$$S(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_{p+1}) = fS(X_1, \dots, X_i, \dots, X_{p+1})$$

が成り立つことを確認する. i はどこでも同じなので $i=1$ のとき示す.

$$S(fX_1, X_2, \dots, X_{p+1})$$

$$= fX_1(T(X_2, \dots, X_{p+1})) + \sum_{i=2}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i(T(fX_1, X_2, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}))$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=2}^{p+1} (-1)^{i+1} T([fX_1, X_i], \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}) \\
& + \sum_{2 \leq i < j} (-1)^{i+j} T([X_i, X_j], fX_1, X_2, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1})
\end{aligned}$$

ここで，第2項は

$$\begin{aligned}
& X_i(T(fX_1, X_2, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1})) \\
& = (X_i f)T(\dots, \hat{X}_i, \dots) + fX_i(T(\dots, \hat{X}_i, \dots))
\end{aligned}$$

第3項は

$$\begin{aligned}
& T([fX_1, X_i], \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}) \\
& = T(f[X_1, X_i] - (X_i f)X_1, X_2, \dots, \hat{X}_i, \dots)
\end{aligned}$$

であるから，

$$(X_i f)T(\dots, \hat{X}_i, \dots)$$

が消しあい

$$= fT(X_1, \dots, X_{p+1})$$

以上で，命題の右辺の式が $p + 1$ 階の共変交代テンソル場であることが分かった．

次に

$$T = \frac{1}{p!} T_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

のとき，

$$dT\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{p+1}}}\right)$$

および

$$S\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{p+1}}}\right)$$

を計算し，一致することを示せば証明が終了する．

まず，

$$dT\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{p+1}}}\right)$$

を求めよう．

$$T = \frac{1}{p!} T_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

であるから

$$dT = \frac{1}{p!} \frac{\partial T_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

したがって、

$$\begin{aligned} dT & \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{p+1}}} \right) \\ &= \frac{1}{p!} \frac{\partial T_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^i} \delta_{j_1 \dots j_{p+1}}^{i i_1 \dots i_p} \end{aligned}$$

ここで、 i を j_1 から j_{p+1} までそれぞれ固定し、残りの i_1, \dots, i_p に関して

の和をとればそれぞれ同符号で $p!$ 個あるから

$$= \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \frac{\partial T_{j_1 \dots \hat{j}_k \dots j_{p+1}}}{x^{j_k}}$$

次に

$$S\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{p+1}}}\right)$$

を計算する。

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0$$

であるから、必要なのは第 1 項だけである。したがって、

$$= \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \left(T\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{p+1}}}\right) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \frac{\partial T_{j_1 \dots \hat{j}_k \dots j_{p+1}}}{\partial x^{j_k}}$$

したがって、

$$\begin{aligned} dT & \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{p+1}}} \right) \\ &= S\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{p+1}}}\right) \end{aligned}$$

が成り立ち証明が終了した。

(接ベクトルの項目終わり)