

8. 曲面の基本定理

前の章で，曲面 $f(u, v)$ が与えられたとき，第 1 基本形式

$$I = g_{ij} du^i du^j$$

第 2 基本形式

$$II = h_{ij} du^i du^j$$

が定まり，さらに第 1 基本量 g_{ij} ，第 2 基本量 h_{ij} の間には関係式があり

それは

$$f_{ijk} = f_{ikj}$$

\iff

- $(\Gamma_{ij}^m)_k - (\Gamma_{ik}^m)_j + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nk}^m - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nj}^m - h_{ij} h_{kn} g^{nm} + h_{ik} h_{jn} g^{nm} = 0 \quad (m = 1, 2) \cdots (\#)$
- $(h_{ij})_k - (h_{ik})_j + \Gamma_{ij}^m h_{mk} - \Gamma_{ik}^m h_{mj} = 0 \quad \cdots (b)$

であることが分かった．

これから考えるのは逆に

2次元平面上の単連結な開領域 U の各点に 6 つの関数

$$\{g_{ij}\}, \{h_{ij}\}$$

ただし， $i = 1, 2, j = 1, 2$

$$g_{12} = g_{21}, h_{12} = h_{21}$$

さらに対称行列 (g_{ij}) は正値．

が上式の $(\#), (b)$ を満たすとき， $\{g_{ij}\}$ が第 1 基本量， $\{h_{ij}\}$ が第 2 基本量である曲面が唯一つ存在するか

という問題を扱います．この問題は肯定的に解決することを示すのが本章の目的です．

ここで，唯一つとは剛体運動で重ねあう曲面どうしは同じ曲面と考えると

という意味です .

この問題は , 曲線でいえば

曲率 $k(s)$, 捩率 $\tau(s)$ が与えられたとき , s を弧長とする曲線が唯一つに決まる

という曲線の基本定理と同じことを曲面の場合に行うということです .

これから扱う定理は次のようになります .

定理 (曲面の基本定理)

2次元ユークリッド平面 \mathbb{R}^2 の単連結な開領域 U の各点で定義された 6 つの関数

$$\{g_{ij}\}, \{h_{ij}\}$$

ただし , $1 \leq i, j \leq 2, g_{12} = g_{21}, h_{12} = h_{21}$, さらに対称行列 (g_{ij}) は正値 .
が与えられている .

ここで

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right)$$

で定義する . このとき , 偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = f_i$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}^k f_k + h_{ij} n$$

$$\frac{\partial n}{\partial u^i} = -h_{im} g^{mk} f_k$$

は初期条件

$$f(0, 0) = A, f_1(0, 0) = a, f_2(0, 0) = b, n(0, 0) = c$$

$$f_i(0, 0) \cdot f_j(0, 0) = g_{ij}(0, 0), f_i(0, 0) \cdot n(0, 0) = 0, n(0, 0) \cdot n(0, 0) = 1$$

および , 次の 3 つの可積分条件

$$f_{ij} = f_{ji}$$

$$f_{ijk} = f_{ikj}$$

$$n_{ij} = n_{ji}$$

のもと唯一の解 $f = (f^1, f^2, f^3)$ が存在する .

先ず , 可積分条件の一つである

$$n_{ij} = n_{ji}$$

が

$$f_{ijk} = f_{ikj}$$

に含まれることと , 定理より得られる曲面の第 1 基本量と第 2 基本量が与えられた $\{g_{ij}\}, \{h_{ij}\}$ であることを示す .

前の章で示した

$$n_i = -h_{ik}g^{kl}f_l$$

の両辺を u_j で偏微分するのであるが , その計算のためにまず

$$(g^{ij})_k$$

を計算する .

$$g^{pq}g_{qr} = \delta_r^p$$

より

$$g^{sr}(g^{pq})_j g_{qr} + g^{sr}g^{pq}(g_{qr})_j = 0$$

$$\therefore (g^{ps})_j + g^{sr}g^{pq}(g_{qr})_j = 0$$

さらに ,

$$\frac{\partial g_{qr}}{\partial u^j} = \Gamma_{rj,q} + \Gamma_{qj,r}$$

より

$$(g^{ps})_j + g^{sr}g^{pq}(\Gamma_{rj,q} + \Gamma_{qj,r}) = 0$$

$$\therefore (g^{ps})_j + g^{sr}\Gamma_{rj}^p + g^{pq}\Gamma_{qj}^s = 0 \cdots (\text{h})$$

(h) を利用して

$$n_i = -h_{ik}g^{kp}f_p$$

の両辺を u_j で偏微分する .

$$\begin{aligned}
n_{ij} &= -(h_{ik})_j g^{kp} f_p - h_{ik} (g^{kp})_j f_p - h_{ik} g^{kp} f_{pj} \\
&= -(h_{ik})_j g^{kp} f_p + h_{ik} (g^{pr} \Gamma_{rj}^k + g^{kq} \Gamma_{qj}^p) f_p - h_{ik} g^{kp} (\Gamma_{pj}^m f_m + h_{pj} n) \\
&= \{-(h_{ik})_j + h_{ip} \Gamma_{kj}^p\} g^{mk} f_m - h_{ik} g^{kp} h_{pj} n
\end{aligned}$$

i, j を交換して

$$n_{ji} = \{-(h_{jk})_i + h_{jp} \Gamma_{ki}^p\} g^{mk} f_m - h_{jk} g^{kp} h_{pi} n$$

$$\therefore n_{ij} = n_{ji}$$

\iff

$$(h_{ik})_j - h_{ip} \Gamma_{kj}^p - (h_{jk})_i + h_{jp} \Gamma_{ki}^p = 0 \cdots (1)$$

$$h_{ik} g^{kp} h_{pj} - h_{jk} g^{kp} h_{pi} = 0 \cdots (2)$$

(1) はコダッチの方程式で, (2) は自明な恒等式です. すなわち $n_{ij} = n_{ji}$ は $f_{ijk} = f_{ikj}$ が成り立てばその条件に含まれる式である.

可積分条件

$$f_{ij} = f_{ji}$$

を調べよう.

偏微分方程式の 2 番目の式より

$$f_{ij} = \Gamma_{ij}^k f_k + h_{ij} n$$

であり,

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, h_{ij} = h_{ji}$$

より

$$f_{ij} = f_{ji}$$

である. したがって, 偏微分方程式を解くための可積分条件は

$$f_{ijk} = f_{ikj}$$

だけであることがわかる.

偏微分方程式の解

$$f = (f^1, f^2, f^3)$$

の第 1 基本量, 第 2 基本量がそれぞれ $\{g_{ij}\}, \{h_{ij}\}$ であることを示すこと

が残された問題である .

この問題を解決するのは

$$f_i \cdot f_j = g_{ij} \quad \dots (1)$$

$$f_i \cdot n = 0 \quad \dots (2)$$

$$n \cdot n = 1 \quad \dots (3)$$

を示せばよい . なぜならば

第 1 基本量については (1) より成り立つ . 第 2 基本形式は

$$n_i = -h_{ik} g^{kj} f_j$$

より

$$II = -dn \cdot df = -n_i du^i \cdot f_j du^j = h_{ik} g^{kl} f_l du^i \cdot f_j du^j = h_{ij} du^i du^j$$

したがって , 残された問題は上記の (1), (2), (3) を示すだけである .

解曲面 $f(u^1, u^2)$ 上の曲線

$$C : f(u^1(t), u^2(t)) (= f(t))$$

のうち , 偏微分方程式の初期条件である

$$f(0) = f(u^1(0), u^2(0)) = A$$

を満たすものを考える .

曲線 C 上で

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(f_i \cdot f_j - g_{ij}) \\ &= f_{ik} \frac{du^k}{dt} \cdot f_j + f_i \cdot f_{jk} \frac{du^k}{dt} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{du^k}{dt} \\ &= \{(\Gamma_{ik}^m f_m + h_{ik} n) \cdot f_j + f_i \cdot (\Gamma_{jk}^m f_m + h_{jk} n) - (\Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i})\} \frac{du^k}{dt} \\ &= \{\Gamma_{ik}^m f_m \cdot f_j + \Gamma_{jk}^m f_m \cdot f_i + h_{ik} n \cdot f_j + h_{jk} n \cdot f_i - g_{jm} \Gamma_{ik}^m - g_{im} \Gamma_{jk}^m\} \frac{du^k}{dt} \\ &= \{\Gamma_{ik}^m (f_m \cdot f_j - g_{mj}) + \Gamma_{jk}^m (f_m \cdot f_i - g_{mi}) + h_{ik} n \cdot f_j + h_{jk} n \cdot f_i\} \frac{du^k}{dt} \quad \dots (4) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(f_i \cdot n) = (f_{ij} \cdot n + f_i \cdot n_j) \frac{du^j}{dt}$$

$$\begin{aligned}
&= \{(\Gamma_{ij}^m f_m + h_{ij}n) \cdot n + f_i \cdot (-h_{jl}g^{lm} f_m)\} \frac{du^j}{dt} \\
&= \{\Gamma_{ij}^m f_m \cdot n + h_{ij}n \cdot n - h_{jl}g^{lm}(f_i \cdot f_m - g_{im} + g_{im})\} \frac{du^j}{dt} \\
&= \{\Gamma_{ij}^m f_m \cdot n - h_{jl}g^{lm}(f_i \cdot f_m - g_{im}) + h_{ij}(n \cdot n - 1)\} \frac{du^j}{dt} \cdots (5)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(n \cdot n - 1) = 2n \cdot n_i \frac{du^i}{dt} = -2h_{il}g^{lm} f_m \cdot n \frac{du^i}{dt} \cdots (6)$$

以上の計算で得られた (4),(5),(6) は関数

$$f_i(f(t)) \cdot f_j(f(t)) - g_{ij}(f(t)), f_i(f(t)) \cdot n(f(t)), n(f(t)) \cdot n(f(t)) - 1$$

の連立線形常微分方程式である。さらに、初期条件は

$$\begin{aligned}
&f_i(f(0)) \cdot f_j(f(0)) - g_{ij}(f(0)) = 0, f_i(f(0)) \cdot n(f(0)) = 0, n(f(0)) \cdot \\
&n(f(0)) - 1 = 0
\end{aligned}$$

であるから、解の一意性より

$$f_i \cdot f_j = g_{ij}$$

$$f_i \cdot n = 0$$

$$n \cdot n = 1$$

が成り立つ。さらに、曲線 C の任意性より曲面 f 上で成り立つことが示された。

例

$$I = du^2 + \sin^2 u dv^2$$

$$II = du^2 + \sin^2 u dv^2$$

のとき、曲面を求めよう。ちなみに単位球面の第 1, 2 基本形式は

$$I = du^2 + \cos^2 u dv^2$$

$$II = du^2 + \cos^2 u dv^2$$

であるから，単位球面になる．($u' = \frac{\pi}{2} - u$ とすればよい)

第 1 基本量，第 2 基本量

$$E = 1, F = 0, G = \sin^2 u, L = 1, M = 0, N = \sin^2 u$$

が可積分条件を満たすことを確認しましょう．

$$I = du^2 + Gdv^2$$

$$II = du^2 + Ndv^2$$

のときの， G, N の関係を調べます．

Γ_{ij}^k を求める必要があります．これは前の章ですでに計算してあり

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2}$$

さらに曲率テンソル R_{1221} は

$$R_{1221} = -\frac{G_{uu}}{2} + \frac{G_u^2}{4G} = -(\sqrt{G})_{uu}\sqrt{G}$$

である．

まず，コダッチの可積分条件から調べる．

$$(h_{11})_2 - (h_{12})_1 + \Gamma_{11}^m h_{m2} - \Gamma_{12}^m h_{m1} = 0$$

$$(h_{21})_2 - (h_{22})_1 + \Gamma_{21}^m h_{m2} - \Gamma_{22}^m h_{m1} = 0$$

であるから，第 1 式は自明な式で第 2 式は

$$-N_u + \Gamma_{21}^2 h_{22} - \Gamma_{22}^1 = 0$$

$$\therefore -N_u + \frac{G_u N}{2G} + \frac{G_u}{2} = 0 \cdots (1)$$

となる．

ガウスの可積分条件は

$$R_{1221} = h_{11}h_{22} - (h_{12})^2$$

である．したがって，

$$-(\sqrt{G})_{uu}\sqrt{G} = N \cdots (2)$$

条件 (1), (2) はなかなかきつい条件である．もちろんこの条件は曲率線座標 ($F = M = 0$) でさらに $E = L = 1$ の条件の下であるが，曲面の可能性よりもう少し自由度があると思ったが予想外でした．

さて、今扱っているのは

$$G = N = \sin^2 u$$

であるから、ガウス、コダッチの可積分条件を満たすことが分かる。

それでは曲面を求めよう。

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \cot u, \Gamma_{22}^1 = -\sin u \cos u$$

より、曲面 $f(u, v)$ の偏微分方程式は

$$\begin{cases} f_{uu} = n & \cdots (1) \\ f_{uv} = \cot u f_v & \cdots (2) \\ f_{vv} = -\sin u \cos u f_u + \sin^2 u n & \cdots (3) \\ n_u = -f_u & \cdots (4) \\ n_v = -f_v & \cdots (5) \end{cases}$$

となる。

まず、(1),(4) より

$$f_{uuu} = -f_u$$

であるから

$$f_u = \cos u a(v) + \sin u b(v)$$

ここで、 $a(v), b(v)$ は3次元のベクトルである。なお、以下 $\sin u, \cos v$ 等の三角関数以外は3次元ベクトルである。

したがって、

$$f(u, v) = \sin u a(v) - \cos u b(v) + c(v)$$

次に

$$f_{uv} = a'(v) \cos u + b'(v) \sin u$$

一方 (2) より

$$f_{uv} = \cot u (a'(v) \sin u - b'(v) \cos u + c'(v))$$

より

$$b'(v) = c'(v) \cos u$$

したがって,

$$b'(v) = 0, c'(v) = 0$$

は定ベクトルであるから

$$\therefore b(v) = b_0, c(v) = c_0$$

とおく. これでは

$$f(u, v) = a(v) \sin u - b_0 \cos u + c_0$$

となる. 後は $a(v)$ を求めればよい.

$$f_{vv} = a''(v) \sin u$$

である. 一方 (3) より

$$f_{vv} = -\sin u \cos u f_u + \sin^2 u n$$

$$= -\sin u \cos u (a(v) \cos u + b_0 \sin u) + \sin^2 u f_{uu}$$

$$= -a(v) \sin u$$

したがって,

$$a''(v) = -a(v)$$

$$a(v) = d_0 \cos v + e_0 \sin v$$

以上のことより

$$f(u, v) = (d_0 \cos v + e_0 \sin v) \sin u - b_0 \cos u + c_0$$

であることが分かった. ここで, b_0, c_0, d_0, e_0 は 3 次元の定ベクトルである.

ここで, b_0, d_0, e_0 は互いに直交する単位ベクトルであることを示す.

$$f_v \cdot f_v = G = \sin^2 u$$

であり, 一方

$$(-d_0 \sin v + e_0 \cos v) \sin u \cdot (-d_0 \sin v + e_0 \cos v) \sin u$$

$$= (|d_0|^2 \sin^2 v - 2 \cos v \sin v d_0 \cdot e_0 + |e_0|^2 \cos^2 v) \sin^2 u$$

したがって

$$|d_0|^2 \sin^2 v - 2 \cos v \sin v d_0 \cdot e_0 + |e_0|^2 \cos^2 v = 1$$

任意の v で成り立つから

$$|d_0| = |e_0| = 1, d_0 \cdot e_0 = 0$$

さらに .

$$f_u \cdot f_v = F = 0$$

であり ,

$$((d_0 \cos v + e_0 \sin v) \cos u + b_0 \sin u) \cdot (-d_0 \sin v + e_0 \cos v) \sin u = 0$$

より

$$-\sin v b_0 \cdot d_0 + \cos v b_0 \cdot e_0 = 0$$

これが任意の v で成り立つから

$$b_0 \cdot d_0 = 0, b_0 \cdot e_0 = 0$$

最後に

$$f_u \cdot f_u = E = 1$$

より

$$\cos^2 v \cos^2 u + \sin^2 v \cos^2 u + |b_0|^2 \sin^2 u = 1$$

したがって

$$|b_0| = 1$$

以上で

$$|b_0| = |d_0| = |e_0| = 1, b_0 \cdot d_0 = d_0 \cdot e_0 = e_0 \cdot b_0 = 0$$

が得られた .

$$f(u, v) = d_0 \cos v \sin u + e_0 \sin v \sin u - b_0 \cos u + c_0$$

であるから ,

$$|f(u, v) - c_0| = 1$$

である (球面のオイラー表示).

以上で $f(u, v)$ が単位球面であることが証明された .

第 1 基本量 , 第 2 基本量から曲面を作ることは , 偏微分方程式を解くことになり , 解が存在することは分かるが , 具体的に求めることは簡単ではない . ここで挙げた例は数少ないうまくいく例である . パソコンを用いて近似解を求め曲面の概形を求めることは比較的容易であるが , 数学的には使い物

にはならないことが多い。

パソコンを用いての曲面の基本定理の解曲面については
田沢義彦著 曲線論・曲面論 ピアソン
が優れている。

この章の内容は
大槻富之助著 微分幾何学 朝倉書店
の75ページ 定理13.1 (ボンネの基本定理) を参考にした。ここで
扱った例は同書の姉妹書である

大槻富之助著 微分幾何学演習 朝倉書店
の13節 例題3である。さらに同演習書では

$$I = (1 + u^2)du^2 + u^2 dv^2$$

$$II = \frac{du^2 + u^2 dv^2}{\sqrt{1 + u^2}}$$

も解いている。あわせて参考にされるとよいと思う。

最後に、曲面の基本定理の土台である偏微分方程式を解こう。

偏微分方程式を解くといっても、頭の切替が必要です。まず、これから述べる内容の概略を述べます。

偏微分方程式が常微分方程式と異なる点の1つに、常に解けるとは限らないということがあります。1階の偏微分方程式は解けますが、連立偏微分方程式は解けるための条件が、これを可積分条件といいます。つきまとい

ます。
たとえば、

$$z = z(x, y)$$

に関しての次の偏微分方程式を考えましょう。

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = g(x, y) \end{cases} \dots (\#)$$

この偏微分方程式が解けるかどうか考えてみましょう。もちろん

$f(x, y), g(x, y)$ は 1 次導関数とともに連続であるとしします。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

であるから，解が存在するために

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \dots (b)$$

が必要であることが分かります。

それでは，逆の問題すなわち (b) を満たせば連立偏微分方程式 (#) は解けるかが問題です。これが，これから証明する定理の本質ですが，これは正しいのです。それは次のように示します。

まず， $y = a$ を固定して， x についての常微分方程式として

$$\frac{dz(x)}{dx} = f(x, a)$$

を解きます。これは常微分方程式であるから必ずとけ，それを $z(x, a)$ とおき，この初期条件すなわち $y = a$ のとき $z(x, a)$ で x を固定して y についての常微分方程式

$$\frac{dz(x, y)}{dy} = g(x, y)$$

解き $z(x, y)$ が求まります。この得られた $z(x, y)$ は (#) の 2 番目の式は満たしますが，(#) の 1 番目の式は満たすかどうか分かりません。1 番目の式を満たすことを示すために (b) が用いられます。すなわち (b) があれば偏微分方程式 (#) が解けることになります。

証明に入る前に，もう少し偏微分方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = g(x, y) \end{cases} \dots (\#)$$

を眺めましょう。

もし偏微分方程式の解 $z(x, y)$ がもたられば \mathbb{R}^3 上で曲面

$$S : (x, y, z(x, y))$$

が決まります。曲面の接ベクトル場として

$$X = (1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial}{\partial z},$$

$$Y = (0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y} + g(x, y) \frac{\partial}{\partial z}$$

が決まり、偏微分方程式を解くことは、 \mathbb{R}^3 においてベクトル場 X, Y を与えたとき、 X, Y が接ベクトルである曲面を求めることを意味しています。

次に、

$$X = (1, 0, f(x, y)), Y = (0, 1, g(x, y))$$

であり、

$X, Y, (0, 0, 1) = \frac{\partial}{\partial z}$ は一次独立であるから（成分を並べれば対角成分が 1 で上半三角になる） \mathbb{R}^3 の基底となる。

一方、 X, Y の交換子積 $[X, Y]$ を計算しよう。

$$[X, Y] = \left[\frac{\partial}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + g(x, y) \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z}$$

したがって

交換子積 $[X, Y]$ が X, Y の張るベクトル空間上にあるすなわち曲面の S 上にあることと可積分条件条件が同値になりました。これらの内容が次章で扱うフロベニウスの定理です。

それでは話を戻して目的の定理の証明に入りましょう。これから証明する定理が、次章の土台になります。言い方を変えれば次章で扱う内容は、次の定理を変形しただけのことです。

定理 1

$U \subset \mathbb{R}^2, V \subset \mathbb{R}^3$ は開集合で,

$$f_p^i : U \times V \longrightarrow \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, 3, p = 1, 2)$$

は $U \times V$ で定義された偏導関数まで含めて連続とする ..

連立偏微分方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial x^i}{\partial u^p} = f_p^i(u^1, u^2, x^1, x^2, x^3), & (i = 1, 2, 3, p = 1, 2) \cdots (\#) \\ x^i(u_0^1, u_0^2) = x_0^i & i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

は, f_p^i が任意の i, p, q で

$$\frac{\partial f_p^i}{\partial u^q} - \frac{\partial f_q^i}{\partial u^p} + \frac{\partial f_p^i}{\partial x^j} f_q^j - \frac{\partial f_q^i}{\partial x^j} f_p^j = 0 \quad \cdots (b)$$

$$\left(\Leftrightarrow \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^p \partial u^q} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^q \partial u^p} \right)$$

を満たすとき, 連立偏微分方程式 (#) の解が唯一存在する

証明

まず, 可積分条件 (b) が必要条件であることを確かめよう .

$x^i(u^1, u^2)$ を解とする . このとき

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^p \partial u^q} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^q \partial u^p}$$

である .

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{\partial}{\partial u^q} f_p^i = \frac{\partial f_p^i}{\partial u^q} + \frac{\partial f_p^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial u^q} \\ &= \frac{\partial f_p^i}{\partial u^q} + \frac{\partial f_p^i}{\partial x^j} f_q^j \end{aligned}$$

右辺は p, q を入れ替えた式であるから

$$\frac{\partial f_p^i}{\partial u^q} + \frac{\partial f_p^i}{\partial x^j} f_q^j = \frac{\partial f_q^i}{\partial u^p} + \frac{\partial f_q^i}{\partial x^j} f_p^j$$

これが可積分条件 (b) である .

次に f_p^i が可積分条件を満たすとき解が唯一存在することを示そう .

方針は、片方を固定して、常微分方程式として解く。すなわち、 u^2 を固定して u^1 の常微分方程式として解き

$$x^i(u^1, u_0^2)$$

をもとめ、さらに任意の u^1 を固定して u^2 の常微分方程式として解いて

$$x^i(u^1, u^2)$$

この解が与えられた偏微分方程式 (♯) を満たすための条件として (b) が使われる。

それでは、証明に入ろう。

初期条件として

$$u_0^1 = 0, u_0^2 = 0$$

として議論する。

$u^2 = 0$ を固定して連立常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dy^i}{dt} = f_1^i(t, 0, y^1, y^2, y^3) \\ y^i(0) = x^i(0, 0) \end{cases}$$

の唯一の解を $y^i(t)$ として、 $x_{(1)}^i(u^1, 0)$ を

$$x_{(1)}^i(u^1, 0) = y^i(u^1)$$

で定義する。

次に u^1 を固定して、連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dz^i}{dt} = f_2^i(u^1, t, z^1, z^2, z^3) \\ z^i(0) = x_{(1)}^i(u^1, 0) \end{cases}$$

の唯一の解を $z^i(t)$ として、 $x_{(2)}^i(u^1, u^2)$ を

$$x_{(2)}^i(u^1, u^2) = z^i(u^2)$$

で定義する。

ここで求めた $\{x_{(2)}^i(u^1, u^2)\}$ が求める解であることを主張したい。

まず、

$$x_{(2)}^i(u^1, 0) = x_{(1)}^i(u^1, 0) \quad \cdots (1)$$

に注意する。

$x_{(2)}^i$ の作り方より

$$\frac{\partial x_{(2)}^i(u^1, u^2)}{\partial u^2} = f_2^i(u^1, u^2, x_{(2)}^1, x_{(2)}^2, x_{(2)}^3) \quad \dots (2)$$

は成り立つのが保証されるが,

$$\frac{\partial x_{(2)}^i(u^1, u^2)}{\partial u^1} = f_1^i(u^1, u^2, x_{(2)}^1, x_{(2)}^2, x_{(2)}^3)$$

が成り立つことを示す必要がある．ここで，可積分条件が用いられる．

$$g^i(u^1, u^2) = \frac{\partial x_{(2)}^i(u^1, u^2)}{\partial u^1} - f_1^i(u^1, u^2, x_{(2)}^1, x_{(2)}^2, x_{(2)}^3) \quad \dots (3)$$

と置く．

まず， $u^2 = 0$ のときを調べる．(1) より

$$\begin{aligned} g^i(u^1, 0) &= \frac{\partial x_{(2)}^i(u^1, 0)}{\partial u^1} - f_1^i(u^1, 0, x_{(2)}^1(u^1, 0), x_{(2)}^2(u^1, 0), x_{(2)}^3(u^1, 0)) \\ &= \frac{\partial x_{(1)}^i(u^1, 0)}{\partial u^1} - f_1^i(u^1, 0, x_{(1)}^1(u^1, 0), x_{(1)}^2(u^1, 0), x_{(1)}^3(u^1, 0)) = 0 \end{aligned}$$

次に

$$\frac{\partial g^i(u^1, u^2)}{\partial u^2}$$

を計算する．

$$\frac{\partial g^i(u^1, u^2)}{\partial u^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\partial x_{(2)}^i(u^1, u^2)}{\partial u^2} \right) - \frac{\partial f_1^i(u^1, u^2, x_{(2)}^1(u^1, u^2), x_{(2)}^2(u^1, u^2), x_{(2)}^3(u^1, u^2))}{\partial u^2}$$

$$= \frac{\partial f_2^i}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1^i}{\partial u^2}$$

$$= \frac{\partial f_2^i}{\partial u^1} + \frac{\partial f_2^i}{\partial x^j} \frac{\partial x_{(2)}^j}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1^i}{\partial u^2} - \frac{\partial f_1^i}{\partial x^j} \frac{\partial x_{(2)}^j}{\partial u^2}$$

ここで， $g^i(u^1, u^2)$ の定義式を用いて第 2 項を書き換える．

$$= \frac{\partial f_2^i}{\partial u^1} + \left(\frac{\partial f_2^i}{\partial x^j} g^j(u^1, u^2) + \frac{\partial f_2^i}{\partial x^j} f_1^j \right) - \frac{\partial f_1^i}{\partial u^2} - \frac{\partial f_1^i}{\partial x^j} f_2^j$$

可積分条件より

$$\frac{\partial f_2^i}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1^i}{\partial u^2} + \frac{\partial f_2^i}{\partial x^j} f_1^j - \frac{\partial f_1^i}{\partial x^j} f_2^j = 0$$

であるから

$$\frac{\partial g^i(u^1, u^2)}{\partial u^2} = \frac{\partial f_2^i}{\partial x^j} g^j(u^1, u^2)$$

を得る．この式は $g^i(u^1, u^2)$ を u^2 の関数と見たときの常微分方程式で，
 $g(u^1, 0) = 0$

であるから，解の一意性より

$$g^i(u^1, u^2) \equiv 0$$

$$\therefore \frac{\partial x_{(2)}^i(u^1, u^2)}{\partial u^1} = f_1^i(u^1, u^2, x_{(2)}^1, x_{(2)}^2, x_{(2)}^3)$$

が成り立つ．

以上で証明が終了した．

この定理の証明から分かるように，連立偏微分方程式は可積分条件さえ満たすことが分かれば，常微分方程式の問題に帰着される．

さて，今証明した定理

定理 1

$U \subset \mathbb{R}^2, V \subset \mathbb{R}^3$ は開集合で，

$$f_p^i : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}, (i = 1, 2, 3, p = 1, 2)$$

は $U \times V$ で定義された偏導関数まで含めて連続とする．．

連立偏微分方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial x^i}{\partial u^p} = f_p^i(u^1, u^2, x^1, x^2, x^3), & (i = 1, 2, 3, p = 1, 2) \cdots (\#) \\ x^i(u_0^1, u_0^2) = x_0^i & i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

は， f_p^i が任意の i, p, q で

$$\frac{\partial f_p^i}{\partial u^q} - \frac{\partial f_q^i}{\partial u^p} + \frac{\partial f_p^i}{\partial x^j} f_q^j - \frac{\partial f_q^i}{\partial x^j} f_p^j = 0 \quad \cdots (b)$$

$$\left(\Leftrightarrow \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^p \partial u^q} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^q \partial u^p} \right)$$

を満たすとき，連立偏微分方程式 $(\#)$ の解が唯一存在する

を別の方面から眺めてみよう．

まず,

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^p} = f_p^i(u^1, u^2, x^1, x^2, x^3), \quad (i = 1, 2, 3, p = 1, 2)$$

は任意の点 (x^1, x^2, x^3) において, 任意の (u^1, u^2) に対して2つベクトル $\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1}, \frac{\partial x^2}{\partial u^1}, \frac{\partial x^3}{\partial u^1}\right), \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^2}, \frac{\partial x^2}{\partial u^2}, \frac{\partial x^3}{\partial u^2}\right)$

が決まる. これは, 任意の (u^1, u^2) に対して, 各点 (x^1, x^2, x^3) に平面を与えることを意味しています. この偏微分方程式の解は, 与えられた平面が接平面となる曲面を求めることを意味します.

言い方を少し変えれば, \mathbb{R}^3 に2つのベクトル場 X_1, X_2 が与えられたとき, 接ベクトル空間が X_1, X_2 の張る接ベクトル空間である曲面が存在するための条件が可積分条件 (b) だということです.

次章でこれらについてもう少し深く学びます.

偏微分方程式をベクトル場の立場で眺めましたが, ベクトル場の双対空間である1次微分形式の立場から偏微分方程式を見てみましょう.

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^p} = f_p^i(u^1, u^2, x^1, x^2, x^3), \quad (i = 1, 2, 3, p = 1, 2)$$

に対して, $i = 1$ のとき

$$\frac{\partial x^1}{\partial u^1} = f_1^1, \quad \frac{\partial x^1}{\partial u^2} = f_2^1$$

であるから, この2式は

$$dx^1 = f_1^1 du^1 + f_2^1 du^2$$

を意味します. したがって, 偏微分方程式は

$$dx^i = f_1^i du^1 + f_2^i du^2 \quad (i = 1, 2, 3) \cdots (1)$$

と書くことができます. すなわち偏微分方程式の解の曲面上では1次微分形式 (1) を満たす. そこで, 1次微分形式 ω^i ($i = 1, 2, 3$) を

$$\omega^i = dx^i - f_1^i du^1 - f_2^i du^2$$

で定めれば, 定理1は

定理2

連立 Pfaff 方程式 (1 次微分形式による方程式のこと)

$$\omega^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

は

f_p^i が任意の i, p, q で

$$\frac{\partial f_p^i}{\partial u^q} - \frac{\partial f_q^i}{\partial u^p} + \frac{\partial f_p^i}{\partial x^j} f_q^j - \frac{\partial f_q^i}{\partial x^j} f_p^j = 0 \quad \dots (b)$$

を満たすとき , 初期条件

$$x^i(u_0^1, u_0^2) = x_0^i \quad i = 1, 2, 3$$

に対して , 初期条件を満たす解が唯一存在する .

となる . これらも次章で解説します .

(曲面の基本定理の項目終わり)