

回転面の諸量

xz 平面上の曲線 $x = f(u)$, $z = g(u)$ を z 軸の周りに回転した曲面

$$T = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \quad \dots \textcircled{1}$$

は $F=0$, $M=0$ (これから計算する) でとても扱いやすい曲面です. そのため, たとえば極小曲面や負の定曲率曲面等ある条件を満たす曲面を探すとき, 回転面のなかで探すことが非常に多い. 実際はさらに $f(u) = u$ または $g(u) = u$ として, 微分方程式の問題に帰着させることを本文の中で行っている.

ここでは, 曲面①の第1基本形式, 第2基本形式, 法線ベクトル, クリストッフエルシンボル, 全曲率, 平均曲率を計算する. 活用していただきたい.

$$T_u = (f' \cos v, f' \sin v, g')$$

$$T_v = (-f \sin v, f \cos v, 0)$$

$$T_{uu} = (f'' \cos v, f'' \sin v, g'')$$

$$T_{uv} = (-f' \sin v, f' \cos v, 0)$$

$$T_{vv} = (-f \cos v, -f \sin v, 0)$$

$$T_u \times T_v = (-f g' \cos v, -f g' \sin v, f f')$$

単位法線ベクトルを n とする.

$$\Delta = \sqrt{f'^2 + g'^2} \quad \text{とおく.}$$

$$n = (-g' \cos v, -g' \sin v, f') / \Delta$$

$$g_{11} = E = f'^2 + g'^2$$

$$g_{12} = F = 0$$

$$g_{22} = G = f^2$$

$$h_{11} = L = (-f'' g' + f' g'') / \Delta$$

$$h_{12} = M = 0$$

$$h_{22} = N = f g' / \Delta$$

全曲率 K , 平均曲率 H は

$$K = \frac{g'(-f'' g' + f' g'')}{f(f'^2 + g'^2)}$$

$$H = \frac{g'(f'^2 + g'^2) + f(-f'' g' + f' g'')}{2f(f'^2 + g'^2) \sqrt{f'^2 + g'^2}}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{f' f'' + g' g''}{f'^2 + g'^2}, \quad \Gamma_{11}^2 = 0$$

$$\Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{f'}{f}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{f f'}{f'^2 + g'^2}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0$$

回転面の例は次の通り.

固有 2 次曲面では

1. 1 葉双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

座標曲線は $(a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u)$

2. 2 葉双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

座標曲線は $(a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$

その他には

3. トーラス面

$$((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

4. 極小曲面で扱った懸垂面

$$\left(a \cosh \frac{u}{a} \cos v, a \cosh \frac{u}{a} \sin v, u \right)$$

5. 負の定曲率曲面で扱った

$$(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u - \log((1/\cos u) + \tan u))$$

があります.

それぞれの具体的な曲面の形は本文にあります.