

多様体

1. 多様体の定義

ここでは n 次元の多様体を定義します。

まず、 \mathbb{R}^3 における曲面をどのように定義したかを復習しましょう。

\mathbb{R}^3 における曲面は媒介変数表示によって、すなわち曲面は

$$\vec{f}(u^1, u^2) = (f^1(u^1, u^2), f^2(u^1, u^2), f^3(u^1, u^2))$$

と表しました。この方法では、 \mathbb{R}^3 の中における曲面ですから、曲面を外から見ている事になり、この方法をそのまま n 次元の図形で採用するわけにはいきません。

曲面の基本定理があります。それは、

「曲面 \vec{f} が与えられると第 1 基本量 g_{ij} 、第 2 基本量 h_{ij} が定まる。それでは逆にユークリッド平面上に g_{ij}, h_{ij} を定めたとき、第 1 基本量が g_{ij} 、第 2 基本量が h_{ij} の曲面が唯一つ存在するか」

という内容です。

この問題が肯定的に解決するので、曲面は、ユークリッド平面 \mathbb{R}^2 またはその開集合上に g_{ij}, h_{ij} 定めたことと同じであるわけです。

この考えは n 次元空間に応用できそうです。ここでは、 n 次元空間の法ベクトルは考えませんから、第 2 基本量は出てきません。すなわち、採用するのは曲面とユークリッド平面 \mathbb{R}^2 またはその開集合と対応つけてユークリッド平面上で内積 g_{ij} を定める方法です。

以上の考えのもとで、与えられた図形を局所的にユークリッド空間 \mathbb{R}^n と対応つけて、さらに内積は \mathbb{R}^n で定義しようというのが n 次元多様体の定義です。

なお、多様体 M そのものには位相構造しか入っていません。すなわち連続性しか扱えないことに注目することは大事なことです。

それでは多様体の定義に入りましょう。

以下考える M は位相が定義された位相空間で，Hausdorff 空間とします．

定義 1

M の各点 P で， P を含む M の開集合 U および U から n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n のある開集合への同相写像（逆写像が存在してともに連続）

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

が存在するとき M を n 次元位相多様体という．

ここで定義した U, φ を組にした (U, φ) を M の座標近傍または局所座標近傍と呼ぶ．

定義 1 で多様体 M が定義されました．これだけでは，多様体 M の連続性の議論だけしかできません．これから行いたいのは， M 上での微分，積分です．そこで，新しい定義が加わります．

定義 2

M は n 次元の位相多様体とする． M の座標近傍の集合

$$S = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) | \alpha \in I\}$$

が次の 3 条件を満たすとき， S を M の C^∞ 級可微分構造という．

1 . $\{U_\alpha | \alpha \in I\}$ は M の開被覆

2 . 任意の $\alpha, \beta \in I$ で $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ のとき

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

および

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

がともに C^r 級

3 . S は最大である．すなわち， M の局所座標近傍 (U, φ) が S の各局所座標近傍 U_α との共通部分が空集合であるか，空集合でなければ (2) を満たすとき (U, φ) は S の要素である．

定義 3

M を n 次元位相多様体， S を M の C^r 級可微分構造とする． S が付随し

た (M, S) を n 次元 C^r 級微分多様体という。また S の要素 (U_α, ϕ_α) を多様体 (M, S) の許容座標系という。

何点か注意をする。

1. 多様体 M 上では連続性の議論しかできません。微分や積分は、局所的にユークリッド空間が対応しているので、そちらを利用するという態度です。後で、例を挙げますが、多様体 M に導入される微分構造は ϕ_α が連続ならいいのですから、いろいろあります。当然、微分構造が異なれば M 上の関数の微分可能性は異なります。

2. 微分構造についての定義 2 の 3 に違和感があればなくてもかまいません。実際、

$$S_0 = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) | \alpha \in I\}$$

が定義 2 の 1, 2 を満たすならば、任意の局所座標 (V, ψ) でもし 2 を満たすとき S_0 に加えることにより最大である可微分構造を作ることができる。したがって、定義 2 の 1, 2 をみたす S_0 によって可微分構造が決まる。 S_0 を多様体 M の C^r 級座標近傍系という。

3. (U, φ) が M の許容座標系のとき、 $\forall P \in U$ に対して P の座標が $\varphi(P) = x(P) = (x^1(P), \dots, x^n(P))$

よって定まります。この $(U, \varphi; x^i)$ を P における局所座標系とい、 n 個の関数

$$x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

を座標関数といいます。

4. 多様体は特別の事情がない限り C^∞ の可微分構造を考えます。

5. 通常 2 次元曲面を考えるとき、 \mathbb{R}^3 の中に置いて考えますが、ここでは、多様体を扱うとき、高次元のユークリッド空間に置かれているという立場はとらない、多様体だけで考えるということにも目を向けましょう。

例

多様体 M が与えられたとき， M にはいろいろな可微分構造が入ります．

$M = \mathbb{R}$ とします．このとき $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の連続な単調な関数ならすべて \mathbb{R} 上の可微分構造を定めます．ここでは $\varphi(x) = x, \psi(x) = x^3$ の例を示します．

\mathbb{R} の可微分構造として1つは (M, φ) ．ただし $\varphi(x) = x$ ．の定める可微分構造を A ．

もう一つは (\mathbb{R}, ψ) ．ただし $\psi(x) = x^3$ ．の定める可微分構造を A' とします．

ここで $\varphi \circ \psi^{-1} = \sqrt[3]{x}$ であるから， $x = 0$ で微分可能でないので，この2つの可微分構造 A, A' は \mathbb{R} の異なる可微分構造です．もちろん，可微分構造が異なれば \mathbb{R} 上定義される関数の微分可能性も異なります．

2. 写像

多様体上の関数や2つの多様体間の写像の微分可能性について定義します．もちろん，微分可能性は許容座標系を利用して定義することになります（連続性以外は多様体自身では扱えません）．

以下，多様体の次元を明記するときは右肩に，すなわち， n 次元多様体 M は M^n と表すことにし，必要がないときは次元は省略します．

定義 1

M を微分多様体， V を M の開集合，

$$f: V \rightarrow \mathbb{R}$$

を V 上の実数値関数とする．

このとき，任意の許容座標系 (U, φ) で $U \cap V \neq \emptyset$ のとき

$$f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}$$

が C^r 級関数のとき， f は V 上 C^r 級といい，とくに C^∞ のとき f は V

上で滑らかな関数であるという。

多様体 M の開集合 V 上の C^r 級関数全体の集合を $C^r(V)$ と書き，多様体 M 上の C^r 級関数全体を $C^r(M)$ とあらわす。

また，点 P を微分多様体上の点とする。 M における P を含む開集合 V が存在して， $f|_V$ が C^r 級関数のとき，点 P の付近で C^r 級であるという。点 P の付近で C^r 級関数全体のなす集合を C_P^r と表す。ここで， C_P^r の要素 f, g の定義域は一般に異なるが， P を含むある開集合上でともに C^r 級である。

次に2つの多様体間の写像の微分可能性について定義する。

定義2

M, N をそれぞれ微分多様体とする。写像

$$f: M \longrightarrow N$$

について， M 上の点 P における M の許容座標系 (U, φ) と N 上の点 $f(P)$ における N の許容座標系 (V, ψ) で $f(U) \subset V$ を満たすとき，合成写像

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

が $\varphi(P)$ において C^∞ のとき f は P において C^∞ であるといい， M 上の各点で C^∞ 級るとき f は多様体 M から多様体 N への C^∞ 写像または滑らかな写像という。

当然この定義は許容座標系のとり方によらない。

定義3

M, N がともに微分多様体で，

$$f: M \longrightarrow N$$

が同相写像 (f^{-1} が存在して f, f^{-1} がともに連続) で， f, f^{-1} がともになめらか (C^∞) なとき， f を微分同型写像といい，微分同型写像が存在する2つの多様体を互いに微分同型であるという。

ここで，以前数直線 \mathbb{R} で考えた異なる 2 つの微分構造を考えましょう．
すなわち

$$\varphi(x) = x, \psi(x) = x^3$$

で φ, ψ を定義すれば，

微分多様体 (\mathbb{R}, φ) と (\mathbb{R}, ψ) は異なる微分構造である．

一方，連続写像

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

を $f(x) = \sqrt[3]{x}$ で定義すれば

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = (\text{恒等写像})$$

であるので，微分多様体 (\mathbb{R}, φ) と (\mathbb{R}, ψ) は異なる微分構造であるが微分同型である．

この例が示すように，一つの位相多様体にいくつかの異なる異なる微分構造が定義できても，それらは微分同型となりそうである．

さらに，一步進めて，2 つの多様体 M, N が同相なら， M, N の任意の微分構造 $(M, \mathcal{A}), (N, \mathcal{B})$ でも微分同型になると思うことは自然である．しかし，そうはいかない．Milnor により，7 次元球面 S^7 上に，微分同型でない異なる微分構造が定義された．この内容について，詳しく論ずる資格は私にはない（正確に言えば詳しい内容は知らない）．ただこの Milnor の例が驚くべきことであることは分かってもらえると思う．ただ，正しくはないのであるが，2 つの多様体 M, N が同相なら，微分同型になると感覚的にとらえることは，この事実は局所的には正しいので，大きな問題は起こらないと思う．

3. 埋め込み，はめ込み，正規部分多様体

微分多様体 M, N の次元をそれぞれ m, n とする．滑らかな写像

$$f : M^m \longrightarrow N^n$$

について, f を M, N の局所座標系 $(M; x^1, \dots, x^m), (N; y^1, \dots, y^n)$ を用いて表した

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^m)$$

の Jacobi 行列を

$$J_{x;y}(f) = \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \right)$$

で表す. Jacobi 行列の rank は

$$\text{rank} J_{x;y}(f)$$

と表す. Jacobi 行列の rank は局所座標系のとり方にはよらない.

定義 1

微分多様体 M, N の次元をそれぞれ m, n とする. 滑らかな写像

$$f : M \longrightarrow N$$

および, $P \in M$ について,

$$\text{rank} J_{x;y}(f)(P) = m$$

のとき, 写像 f は点 P においてはめ込みであるという. 写像 f が M の各点ではめ込みのとき, 写像 f ははめ込みであるという.

f がはめ込みでさらに f が単射のとき, すなわち $P \neq Q$ のとき $f(P) \neq f(Q)$ のとき, f は埋め込みであるという.

$$f : M \longrightarrow N$$

が埋め込みのとき f は単射であるから, $f(M)$ は M の微分構造により多様体である. 位相に注目すると $f(M)$ の M による位相と $f(M)$ の N より誘導される位相が等しいとは限らない. f が連続であるから $f(M)$ の M より決まる位相が N より誘導される位相より強い場合がある.

定義 2

M, N は微分多様体とする. 滑らかな写像

$$f: M \longrightarrow N$$

が埋め込みのとき, $f(M)$ には2つの位相が考えられる.

1つは, $f(M) \subset N$ より N の部分集合としての位相.

もう一つは

$$f: M \longrightarrow f(M) \subset N$$

により M より定まる位相. 具体的に書けば

L が $f(M)$ の部分集合のとき

L が $f(M)$ の開集合 $\iff f^{-1}(L)$ が M の開集合

ここで

$$i: f(M) \longrightarrow N$$

は連続より, 後者の位相は前者の位相より強いが等しいのいずれかである.

2つの位相が等しいとき (f, M) または $f(M)$ を N の正則部分多様体という.

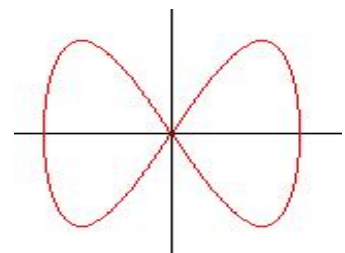
例 1

定義 2 は分かりづらいので例を挙げて説明する.

リサージュ曲線

$$\vec{f} = (\sin \theta, \sin 2\theta) \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

は $(\theta = 0$ のとき原点, 第 1 象限, 第 4 象限を通り
 $\theta = \pi$ のとき原点を通り, 第 2 象限, 第 3 象限を通り
 $\theta = 2\pi$ で原点に戻る曲線)



$$\vec{f}'(\theta) = (\cos \theta, 2 \cos 2\theta) \neq (0, 0)$$

であり, 単射であるから埋め込みである. この曲線の原点に注目して位相を見てみよう.

$$\vec{f}((\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon))$$

は原点を含む開集合はであるが, \mathbb{R}^2 の誘導位相では開集合にならない.

すなわち， \mathbb{R}^2 における原点を含む開集合は第 1 象限，第 3 象限の部分も含むからである．

また，この曲線は \vec{f} による位相で考えれば 1 次元の多様体であり微分構造が \vec{f}^{-1} で定義される微分多様体である．しかし \mathbb{R}^2 の部分集合と見て， \mathbb{R}^2 の誘導位相で考えれば，原点において， \mathbb{R} の開集合と同相にはならないから多様体ではない．

例 2

トーラス面 $T^2 = S^1 \times S^1$ を \mathbb{R}^2 の一辺の長さが 1 の正方形について対辺を同一視してものとする．すなわち

$$T^2 = \{(x, y) | 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$$

である．

関数 f を

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow T^2; t \mapsto (t \bmod 1, \sqrt{2}t \bmod 1)$$

定義すれば $f(\mathbb{R})$ は T^2 において稠密な 1 次元部分多様体であるが，正規部分多様体ではない．

実際， a, b を差の小さい 2 数とすれば

$$f((a, b)) = f(\mathbb{R}) \cap U$$

を満たす T^2 における開集合 U は存在しない ($\because f(\mathbb{R})$ は稠密) ．

4. 単位の分割

ここでは単位の分割を述べます．

多様体は局所的にユークリッド空間と考えて定義したものです．したがって，多様体全体で考えるとき，局所的に定義されたものをつなぎ合わせる必要があり，そのときに用いられるのが標題の単位の分割です．

いくつかの定義をします．

定義 1

位相空間 M の部分集合の族 $\{U_i | i \in \mathcal{I}\}$ が局所有限とは M の任意の点 P に対して、 P を含む開集合 (P の近傍という) V で次の条件を満たすものが存在することである．

$V \cap U_i \neq \phi$ となる i が有限個である

定義 2

$\{U_i | i \in \mathcal{I}\}, \{V_j | j \in \mathcal{J}\}$ がともに位相空間 M の被覆とする． \mathcal{J} に属する各添え字 j に対して

$$V_j \subset U_i$$

を満たす U_i が少なくとも 1 つ存在するとき、被覆 $\{V_j | j \in \mathcal{J}\}$ は被覆 $\{U_i | i \in \mathcal{I}\}$ の細分であるという．

以下多様体 M は

M の任意の開被覆に対して、これの細分でかつ局所有限な開被覆が存在する

を満たすとする．このような位相空間をパラコンパクトという．パラコンパクトについては

松島与三 多様体入門 裳華房

に優れた解説がある．

単位の分割のもとになるのは次の定理である．なお、 \mathbb{R}^m における点 A を中心とする半径 r のボール (内部だけを含み境界は含まない) を $B_r(A)$ と表す．すなわち $A(\vec{a})$ とすると

$$B_r(A) = \{\vec{x} \mid |\vec{x} - \vec{a}| < r\}$$

である .

定理

M を m 次元の微分多様体 . $\{(A_\alpha, \psi_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$ を M の局所座標近傍系とする . このとき , $\{A_\alpha\}$ の細分でかつ局所有限な局所座標系 $\{(U_i, \varphi_i) | i = 1, 2, \dots\}$ で

$$\varphi(U_i) = B_3(O)$$

を満たし , さらに

$$V_i = \varphi_i^{-1}(B_1(O))$$

で定義した V_i も M の被覆であるものが存在する .

ただし O は \mathbb{R}^m の原点である .

証明

M の開集合の族 $\{P_k\}$ は $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = M$ かつ各 $\overline{P_k}$ はコンパクトとする . この集合族 $\{P_k\}$ の存在は , 多様体 M が第 2 可算公理を満たすことが必要であるが , M はこの条件を満たすと仮定する .

この集合族 $\{P_k\}$ を用いて , M 上のコンパクト集合の列

$$K_0, K_1, K_2, \dots$$

ただし

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_i \subset \dots$$

を次のように作る .

$$K_0 = \phi, K_1 = \overline{P_1}$$

さらに K_1, K_2, \dots, K_i が

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_i$$

を満たすように定義したとき ,

$$K_i \subset \bigcup_{k=1}^l P_k$$

を満たす最小の l により

$$K_{i+1} = \overline{\bigcup_{k=1}^l P_k}$$

によって K_{i+1} を定義する .

ここで集合 A の内部を $\overset{\circ}{A}$ と表せば

$$K_i \subset K_{k+1}, \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = M,$$

さらに $K_{i+1} \setminus K_i$ はコンパクト集合で

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} (K_{i+1} \setminus K_i)$$

さて, ここで, $K_{i+2} \setminus K_{i-1}$ は開集合で

$$(K_{i+2} \setminus K_{i-1}) \supset (K_{i+1} \setminus K_i)$$

に注目し, $\{A_\alpha\}$ の細分でありかつ条件を満たす局所座標系を構成する.

まず, A_α は座標近傍であるから \mathbb{R}^m の開集合と同相であることに注意する.

$K_{i+1} \setminus K_i$ の中の任意の点 P に対し $P \in A_\alpha$ を満たす α を定め, $(K_{i+2} \setminus K_{i-1}) \cap A_\alpha$ に含まれる局所座標系 (U, φ) で

$$\varphi(P) = (0, 0, \dots, 0), \varphi(U) = B_3(O)$$

満たすものを取り, さらに

$$V = \varphi^{-1}(B_1(O))$$

で定義する.

このような座標近傍が取れることとは, 座標近傍 A_α の座標写像 ψ_α に P の像が原点になるよう平行移動をし, さらに必要な相似変換を合成した写像による $B_3(O)$ の逆像を U とすればよい.

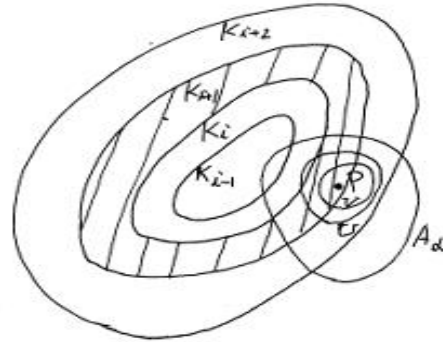
このとき

$$V \subset U \subset (K_{i+2} \setminus K_{i-1}) \cap A_\alpha$$

を満たす. P を $K_{i+1} \setminus K_i$ を動かすこと, および $K_{i+1} \setminus K_i$ がコンパクトより, 有限個の $K_{i+1} \setminus K_i$ の被覆 $\{V_i\}$ が定まる.

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} (K_{i+1} \setminus K_i)$$

であり, $K_{i+1} \setminus K_i$ の被覆が各 i で有限個決まるので, これらの (U, V) が求めるものである. 実際, ここで定義した U が有限交差性を示す必要があるが, $\forall P \in M$ に対して, P の近傍 W に対して, ある整数 k_0 が存在して



$$P \in W \subset K_{k_0}^\circ$$

が成り立つから，有限交差性も成り立つ．したがって，ここで作った局所座標系

$$\{U_\alpha, \varphi_\alpha; V_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$$

が求めるものである．

次に単位の分割の写像を構成するのであるが準備として $0 < a < b$ を満たす a, b に対して $0 \leq h(x) \leq 1$ でかつ

$$h(x) = \begin{cases} 1 & (x \leq a) \\ 0 & (x \geq b) \end{cases}$$

を満たす C^∞ 級の関数を作る必要がある．その関数は通常次のように作る．

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

によって $g(x)$ を定義すると $g(x)$ は C^∞ で， $h(x)$ を

$$h(x) = \frac{g(b-x)}{g(b-x) + g(x-a)}$$

によって定義する．

実際 $x \leq a$ のときは $g(x-a) = 0$ より $h(x) = 1$

$x \geq b$ のときは $g(b-x) = 0$ より $h(x) = 0$

$a < x < b$ のときは $g(b-x), g(x-a) > 0$ より $0 < h(x) < 1$

この関数を用いれば $0 < a < b$ のとき， \mathbb{R}^n で定義された関数 f で $B_a(O)$ において 1, $B_b(O)$ の外側すなわち $\overline{B_b(O)}$ で 0 であるものは，

$$f(\vec{x}) = h(|\vec{x}|)$$

で得られる．

定義 3

多様体 M 上の関数

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

のサポートとは $f(P) \neq 0$ である点の閉包ことであり $\text{supp}(f)$ と表す。すなわち

$$\text{supp}(f) = \overline{\{P \in M \mid f(P) \neq 0\}}$$

である。

定義 4

多様体 M 上の C^∞ の関数の族 $\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ が次の 3 条件を満たすとき、この $\{f_i\}$ を M 上の単位の分割という。ただし \mathbb{N} は自然数全体の集合。

- (1) 任意の点 $P \in M$ に対して $f_i(P) \geq 0$
- (2) 任意の点 $P \in M$ に対して $\sum_i f_i(P) = 1$
- (3) $\{\text{supp}(f_i)\}$ は M の局所有限な被覆である。

定義 5

$\{A_\alpha\}$ が多様体 M の開被覆で M の単位分割 $\{f_i\}$ が、各 i に対して $\text{supp}(f_i) \subset A_\alpha$ を満たす A_α が存在するとき、関数族 $\{f_i\}$ を A_α に属する単位分割という。

M を多様体、 $\{A_\alpha\}$ が M の局所座標近傍系であるとき、 $\{A_\alpha\}$ の細分である局所有限な局所座標系 $\{(U_i, \varphi_i; V_i)\}$ で

$$\varphi_i(U_i) = B_3(O), \varphi_i(V_i) = B_1(O)$$

を満たすものが存在することは定理 1 で証明された .

\mathbb{R}^m 上負の値をとらない関数で $B_1(O)$ で 1, $B_2(O)$ の外側で 0 の値をとる関数を h_i とし ,

M の開集合 U_i 上の関数 g_i を

$$g_i = h_i \circ \varphi_i$$

で定義すれば

$$\text{supp}(f_i) \subset \varphi_i^{-1} \left(\overline{B_2(0)} \right)$$

$\{U_i\}$ は局所有限であるから M 上の各点 P で

$$\sum_j g_j(P)$$

が定義でき ,

$$f_i = \frac{g_i}{\sum_j g_j}$$

によって f_i を定義すれば関数族 $\{f_i\}$ が多様体 M の単位の分割である .