

# 11. 測地曲率と測地線

曲面の内在幾何とは，曲面上の性質だけで幾何学を行うことです．英語では Intrinsic geometry といいます．

内在幾何とはその立体を外部から眺めるのではなく，その中で生活している人の立場に立って，図形そのものが持っている性質だけを利用して研究する幾何学です．これがリーマンの提唱した研究の方法でリーマン幾何と言いますが， $\mathbb{R}^3$  における曲面の研究だけは Intrinsic geometry といいます．

今まで，曲面は 3 次元ユークリッド空間内におかれたものとして，いろいろな性質を調べてきました．すなわち外部からその曲面を見て曲面を扱ったわけです．曲面上だけで幾何学をするという意味を簡単に説明します．

もし，私たちの住んでいる 3 次元ユークリッド空間が 4 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^4$  中に埋め込まれているとします． $\mathbb{R}^3$  の各点で  $\mathbb{R}^4$  における法ベクトル  $\vec{n}$  は  $\mathbb{R}^3$  で生活している人間にはその存在は分かりません． $\mathbb{R}^4$  におけるベクトルは  $\mathbb{R}^3$  と  $\vec{n}$  方向と 2 つに分解し， $\mathbb{R}^3$  で生活している人は  $\mathbb{R}^3$  の方だけ認識できると考えることは自然なことです．

これを  $\mathbb{R}^3$  における曲面の場合に考えて見ましょう．曲面  $S$  上の点  $P$  における  $P$  を始点とする  $\mathbb{R}^3$  のベクトル  $\vec{a}$  は  $T_P(S) \ni \vec{a}_1$  と単位法ベクトル  $\vec{n}$  をもちいて

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + a_2 \vec{n}$$

と表せます．曲面上だけで考えるとき， $\vec{n}$  は存在しない（認識できない）ので， $\vec{a}$  は  $\vec{a}_1$  のことです．すなわち，内在幾何では， $\mathbb{R}^3$  におけるベクトルの接平面  $T_P(S)$  への正射影ベクトルを考えることになります．

曲面  $S : f(u, v)$  上の曲線を考えましょう．曲線は  $f(u(s), v(s))$  と表します． $s$  は弧長です．この曲線の曲率ベクトル（加速度ベクトル）すなわち  $\frac{d^2 f}{ds^2}$  は一般に  $S$  上ではありません．そこで， $\frac{d^2 f}{ds^2}$  の接平面への正射影を行い，それを曲線の曲面における曲率ベクトル（これが測地曲率ベクトルの定

義)とします。曲率ベクトルは加速度ベクトルです。曲線は弧長変数ですから、曲率ベクトルと速度ベクトルは直交します。曲率(加速度)0の曲線が平面の直線に対応するものと考えerことは自然なことです。ここでは、曲率(測地曲率)0の曲線を測地線と名づけ測地線の性質を調べる大きな目標です。

この章で扱う内容は曲面の第1基本形式しか使いません。したがって、曲面の法ベクトル  $\vec{n}$  は用いなくてもできますが、 $\vec{n}$  や場合によっては第2基本形式まで用いたほうが分かりやすいのでそれらを用いて議論を進めます。結果は一つ一つ第1基本量だけで決まることを確認します。

## 1. 曲線論の復習

曲面上の曲線は当然曲面の制約を受けます。したがって、空間における曲線の扱い方とは少し異なります。

まず、空間における曲線をどのように扱ったかを復習しましょう。

3次元ユークリッド空間における曲線を  $f(s)$  とするとき、 $s$  は弧長とします。これが微分幾何で曲線を扱うときの一貫した立場です。すなわち、1つの曲線を媒介変数表示する方法はいくらでもあります。たとえば、平面上の原点を中心とする半径1の円は当然

$$f(s) = (\cos s, \sin s)$$

を考えますが、それだけではありません。任意の数  $k$  に対して

$$f(s) = (\cos ks, \sin ks)$$

も円になります。これらのものを統一的に扱うのは面倒なので、変数は弧長とするのが微分幾何の立場です。もちろん弧長としても曲線表すのは一通りではありません。たとえば  $f(s)$  に対して、 $f(-s)$  や  $f(s+1)$  等も同じ曲線を表します。しかし、これらは微分をすれば一致するか - がつくだけなので統一して扱えます。弧長変数が分かりづらければ、曲線は針金で作って置いたものと考えるとわかりやすいかもしれめせん。もちろん空間のどこに

おいても同じ曲線です .

曲線の解説をします .

曲線を  $f(s)$  とします . ただし ,  $s$  は弧長です .

曲線  $f(s)$  の接ベクトル  $f'(s)$  を  $\alpha(s)$  とします .

曲線は弧長変数より

$$|\alpha(s)| = 1 .$$

次に  $f''(s) = \alpha'(s)$  の大きさを  $k(s)$ ,  $f''(s)$  と同じ向きの単位ベクトルを  $\beta(s)$  とおきます . このとき , 決め方より

$$f''(s) = \alpha'(s) = k(s)\beta(s)$$

が成り立ちます . したがって , 曲率  $k(s)$  は負になることはありません . この  $k(s)$  を曲線のこの

点における曲率といいます . 図形的意味は曲線論の方を読んでください .

なお ,  $\alpha(s) \cdot \alpha(s) = 1$  より ,

$$\alpha'(s) \cdot \alpha(s) = 0$$

$$\therefore \beta \cdot \alpha = 0$$

が成り立ちます .

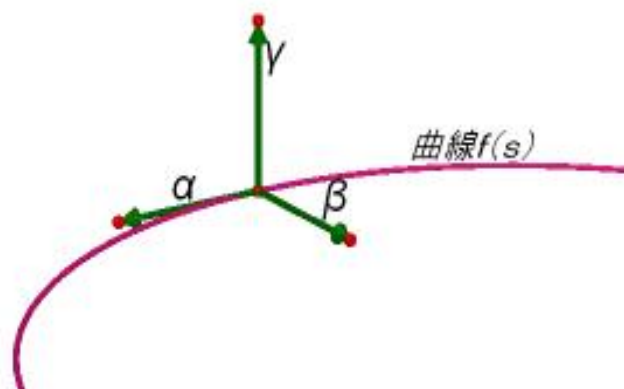
$$\text{次に } \gamma = \alpha \times \beta$$

によって  $\gamma$  を定義します . ただし  $\times$  は外積です .

$|\alpha| = |\beta| = 1, \alpha \cdot \beta = 0$  より  $|\gamma| = 1$  で , さらに  $\alpha, \beta, \gamma$  はどの2つも互いに垂直な単位ベクトルです .

さて , 点  $f(s)$  を始点とするベクトル  $v$  は必ず ,  $\alpha, \beta, \gamma$  で表せます . すなわち

$v = a\alpha + b\beta + c\gamma$  と表せます . したがって ,  $\alpha'(s), \beta'(s), \gamma'(s)$  がそれぞれ  $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$  で表せれば曲線上定義されるベクトルの微分が自由に行



えます。  $\alpha'(s), \beta'(s), \gamma'(s)$  を  $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$  で表したのがフレネ・セレの公式です。なお，曲線  $f(s)$  に沿った座標系  $\{f(s); \alpha(s), \beta(s), \gamma(s)\}$  をフレネ動座標といいます。

フレネの公式を求めましょう。以下， $\alpha(s)$  における  $s$  は省略して  $\alpha$  と表します。

$$\alpha' = k\beta$$

は定義です。

次に  $\gamma'$  を調べます。

$$\gamma \cdot \alpha = 0$$

より

$$\gamma' \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha' = 0$$

$$\text{ここで, } \gamma \cdot \alpha' = \gamma \cdot k\beta = 0$$

$$\text{より } \gamma' \cdot \alpha = 0$$

$$\text{一方, } \gamma \cdot \gamma = 1 \text{ より}$$

$$\gamma' \cdot \gamma = 0$$

したがって， $\gamma'$  は  $\beta$  と平行である。そこで

$$\gamma' = -\tau(s)\beta$$

とおく。  $-$  をつけるのは，そのほうが自然だからであり，大きな意味はない。この  $\tau(s)$  を曲線の  $f(s)$  における捩率という。

残りは  $\beta'$  だけである。

$$\beta = \gamma \times \alpha \text{ であるから}$$

$$\beta' = \gamma' \times \alpha + \gamma \times \alpha'$$

$$= -\tau\beta \times \alpha + \gamma \times k\beta$$

$$= \tau\gamma - k\alpha$$

したがって，次の公式が得られる。

$$\alpha' = k\beta$$

$$\beta' = -k\alpha + \tau\gamma$$

$$\gamma' = -\tau\beta$$

これは行列で次のように表示することが多い。

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

このように，曲線上の各点  $f(s)$  に座標を決める3つのベクトル  $\{f(s); \alpha, \beta, \gamma\}$  を定め， $\alpha', \beta', \gamma'$  を  $\alpha, \beta, \gamma$  で表すことが出来るので，曲線上の微分が自由に出来るようになりました。

## 2. 測地曲率

曲面  $S: f(u^1, u^2)$  上の点  $P$  を通る曲線  $C$  は  $u^1 = u^1(s), u^2 = u^2(s)$  を用いて  $f(u^1(s), u^2(s))$  と表せる。ただし， $s$  は曲線の弧長である。

曲線の接ベクトルを  $\alpha$  とすると，

$$\alpha = \frac{df(u^1(s), u^2(s))}{ds} = f_i \frac{du^i}{ds}$$

であり，曲率ベクトルと同じ向きの単位ベクトルを  $\beta$  とすると

$$k\beta = \frac{d\alpha}{ds} = f_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + f_i \frac{d^2 u^i}{ds^2}$$

が成り立つ。さらに  $f_{ij} = \Gamma_{ij}^k f_k + h_{ij} n$  より

$$= \left( \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) f_k + h_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} n$$

ここで， $h_{ij}$  は第2基本量で， $n$  は曲面の単位法ベクトル。

$k\beta$  ベクトルの法ベクトル  $n$  への正射影の向きまで考えた大きさ

$$k\beta \cdot n = h_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}$$

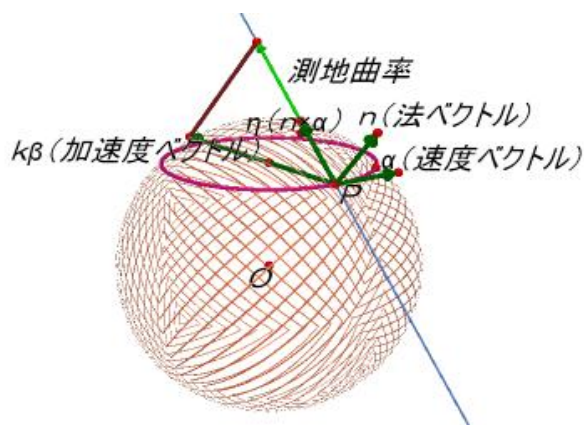
をこの曲線の点  $P$  における法曲率という。なお，法曲率は曲面のガウス曲率の定義で用いました。曲線の曲率ベクトルの接平面への正射影ベクトルの大きさをこの曲線の点  $P$  における測地曲率という。ただ，この定義だけでは不十分で，測地曲率は符号まで考えますのでもう少し測地曲率の定義が続きます。各点  $P$  で，曲面の単位法ベクトル  $n$  が決まります。点  $P$  における曲面  $S$  の接ベクトル  $\eta$  を  $\eta = n \times \alpha$  で定義します。 $\alpha, \eta, n$  は互いに垂直

な点  $P$  における単位ベクトルです。  $k\beta$  と  $\alpha$  は垂直であり、  $k\beta$  の接平面への正射影は  $\eta$  と平行です。そこで、曲線  $C$  の測地曲率  $k_g$  を

$$k_g = k\beta \cdot \eta = k\beta \cdot (n \times \alpha) = k(\beta, n, \alpha)$$

で定義します。

この式から  $n$  や  $\alpha$  の向きが変わると測地曲率の符号が変わることが分かります。右の図で球面における小円の測地曲率を説明します。小円の曲率ベクトル（加速度ベクトル）  $k\beta$  は小円の中心を向きます。そのベクトル



の接平面への正射影の大きさが測地曲率です。なお、測地曲率が曲面の第 1 基本量だけで決まる値であることは後で分かります。

曲線の単位曲率ベクトル  $\beta$  と法ベクトル  $n$  とのなす角を  $\theta$  とする。法曲率  $k_n$ , 測地曲率  $k_g$  は

$$k_n = k \cos \theta, |k_g| = k \sin \theta$$

であるから

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2$$

が成り立つ。

次に、曲線  $C$  と  $u^1$  座標曲線となす角を利用して曲線の測地曲率を表す。ここでの内容は次で学ぶガウス–ボンネの定理の土台になります。

これから考える、曲線と  $u^1$  曲線となす角は  $\mathbb{R}^2$  で考えれば曲線と  $x$  軸となす角です。曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸となす角を  $\theta$  とすると  $f'(x) = \tan \theta$  です。このことから、曲線と  $u^1$  曲線となす角に注目することは曲線を調べるときの自然な方法です。

曲面  $S : f(u^1, u^2)$  の座標曲線は直交座標系とする．すなわち， $u^1$  曲線と  $u^2$  曲線は直交する媒介変数とする．別の言い方をすれば各点で

$$F = f_1 \cdot f_2 = 0$$

が成り立つ．すなわち

$$I = E(du^1)^2 + G(du^2)^2$$

のとき，測地曲率  $k_g$  を計算する．なお，このような曲面の座標系が存在することは，測地座標のところでも実際に構成する．

定義より

$$k_g = k\beta \cdot \eta = \frac{d\alpha(s)}{ds} \cdot (n \times \alpha)$$

である．

ここで， $f_1, f_2$  と同じ向きの単位ベクトルをそれぞれ  $e_1, e_2$  とおく．すなわち，

$$e_1 = \frac{f_1}{\sqrt{E}}, e_2 = \frac{f_2}{\sqrt{G}}$$

曲線の接ベクトル  $\alpha$  と  $e_1$  とのなす角は曲線と  $u$  曲線のなす角であり  $\theta$  とおく．このとき  $\alpha$  は単位ベクトルであるから

$$\alpha = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \quad \dots (1)$$

一方

$$\alpha = \frac{df(u^1(s), u^2(s))}{ds}$$

を計算すると

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{df(u^1(s), u^2(s))}{ds} = f_1 \frac{du^1}{ds} + f_2 \frac{du^2}{ds} \\ &= \sqrt{E} \frac{du^1}{ds} e_1 + \sqrt{G} \frac{du^2}{ds} e_2 \quad \dots (2) \end{aligned}$$

(1), (2) より

$$\sqrt{E} \frac{du^1}{ds} = \cos \theta, \sqrt{G} \frac{du^2}{ds} = \sin \theta \quad \dots (3)$$

また， $e_1 \cdot e_1 = 1, e_1 \cdot e_2 = 0, e_2 \cdot e_2 = 1$  であるから

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{ds} \cdot e_1 &= 0, \frac{de_2}{ds} \cdot e_2 = 0 \\ \frac{de_1}{ds} \cdot e_2 + \frac{de_2}{ds} \cdot e_1 &= 0 \end{aligned}$$

これらの関係式を利用して測地曲率計算する .

まず ,

$$n \times \alpha = n \times (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) = \cos \theta e_2 - \sin \theta e_1$$

一方,(1) より

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\sin \theta \frac{d\theta}{ds} e_1 + \cos \theta \frac{de_1}{ds} + \cos \theta \frac{d\theta}{ds} e_2 + \sin \theta \frac{de_2}{ds}$$

より

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} \cdot (n \times \alpha)$$

$$= \left( -\sin \theta \frac{d\theta}{ds} e_1 + \cos \theta \frac{de_1}{ds} + \cos \theta \frac{d\theta}{ds} e_2 + \sin \theta \frac{de_2}{ds} \right) \cdot (\cos \theta e_2 - \sin \theta e_1)$$

$$= e_2 \cdot \frac{de_1}{ds} + \frac{d\theta}{ds}$$

$$= e_2 \cdot \frac{d}{ds} \frac{f_1}{\sqrt{E}} + \frac{d\theta}{ds}$$

$e_2 \cdot f_1 = 0$  であるから

$$= e_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{df_1}{ds} + \frac{d\theta}{ds}$$

$$= \frac{e_2}{\sqrt{E}} \cdot \left( \Gamma_{1i}^1 \frac{du^i}{ds} f_1 + \Gamma_{1i}^2 \frac{du^i}{ds} f_2 \right) + \frac{d\theta}{ds}$$

( $n$  方向は無視している)

$$= \sqrt{\frac{G}{E}} \left( \Gamma_{11}^2 \frac{du^1}{ds} + \Gamma_{12}^2 \frac{du^2}{ds} \right) + \frac{d\theta}{ds}$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{E_2}{2G}, \Gamma_{12}^2 = \frac{G_1}{2G} \quad (\text{曲面の基本定理を参照})$$

であるから

$$k_g = \frac{-E_2 \frac{du^1}{ds} + G_1 \frac{du^2}{ds}}{2\sqrt{EG}} + \frac{d\theta}{ds}$$

を得る . さらに上記 ( 3 ) の式より ,

$$= \frac{-E_2 \frac{\cos \theta}{\sqrt{E}} + G_1 \frac{\sin \theta}{\sqrt{G}}}{2\sqrt{EG}} + \frac{d\theta}{ds}$$

$$\frac{\partial \log E}{\partial u^2} = \frac{E_2}{E}, \frac{\partial \log G}{\partial u^1} = \frac{G_1}{G}$$

であるから

$$k_g = -\frac{\cos \theta}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial u^2} + \frac{\sin \theta}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u^1} + \frac{d\theta}{ds} \cdots (4)$$

測地曲率  $k_g$  の ( 4 ) の式を Liouville の公式という .



この式をよく見てみよう． $E, G$  は第 1 基本量で， $\theta$  は曲線と  $u_1$  とのなす角で，角度は第 1 基本量だけで決まる．このことから，測地曲率は第 1 基本量だけで決まることが分かる．

例えば，(4) より，第 1 基本形式が

$$I = Edu^2 + Gdv^2$$

のとき， $u$  座標曲線は  $\theta(s) = 0$  であるから，測地曲率  $k_g$  は

$$k_g = -\frac{E_v}{2\sqrt{G}}$$

である．

### 3 . 測地線

各点の測地曲率が 0 である曲面  $S$  上の曲線を曲面  $S$  の測地線という．直線は曲率 0 であるから，曲面上に直線が含まれれば（例えば線織面）， $\mathbb{R}^3$  で考えればその曲率は 0 であり，その接平面への正射影も当然 0 である直線は測地線である．

すでに計算したように，曲面上の曲線  $f(u^1(s), u^2(s))$  の曲率ベクトルは，同じ向きの単位ベクトルを  $\beta$  とすると．

$$k\beta = \left( \frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) f_k + h_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} n$$

であるから，測地線であるための微分方程式は

$$\begin{cases} \frac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0 \\ \frac{d^2u^2}{ds^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0 \end{cases}$$

となります．この微分方程式は，初期条件として

$s = s_0$  のとき

$$(u^1(s_0), u^2(s_0)), \left( \frac{du^1}{ds}, \frac{du^2}{ds} \right)$$

を与えると， $s$  の範囲  $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$  で唯一つの解が存在することが，微分方程式の理論より知られている．したがって，測地線は曲面上の点とその点の方向を一つ与えればただ一つの測地線が存在することが分かる．

なお，微分方程式より  $s$  は弧長の 1 次式ならよいことが分かる．

## 4．弧長の変分

測地線の 2 点間の距離に関する局所的最小性については後で述べるとして，ここでは測地線の性質を変分法の立場で取り扱う．

曲面  $S : f(u^1, u^2)$  上の曲線は  $u^1, u^2$  平面上の曲線  $(u^1(s), u^2(s))$

を用いて  $f(u^1(s), u^2(s))$  と表したが，この節では， $r(s)$  と表す．すなわち

$r(s) = f(u^1(s), u^2(s))$  のことであり

$r : [0, a] \longrightarrow S$

の微分可能な曲線である．ただし， $s$  は弧長である．

曲線  $r$  の変分とは，微分可能な写像  $\alpha$

$\alpha : [0, a] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$

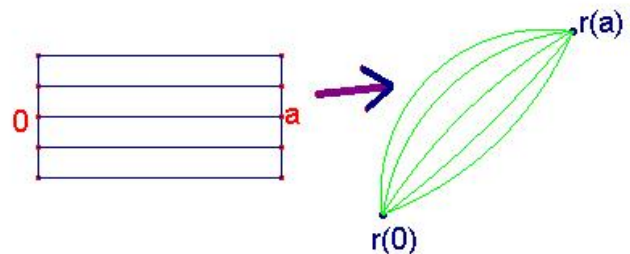
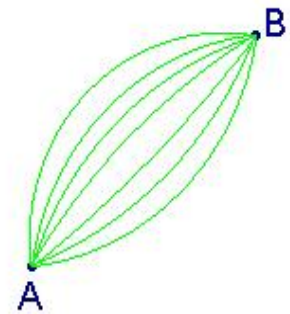
は  $\alpha(t, 0) = r(t)$  を満たし，さらに次の条件を満たすことである．

任意の  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  で

$\alpha(0, t) = r(0), \alpha(a, t) = r(a)$

を満たす．

分かりやすくいえば， $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  である  $t$  を固定すれば  $\alpha(s, t)$  は始点が  $r(0)$ ，終点が  $r(a)$  である曲線であるので，曲線  $r(s)$  の変分とは両端点を固定したまま滑らかに動かすことにより得られるもののことである．



曲線  $r(s)$  の変分  $\alpha(s, t)$  は曲面  $S$  の局所的な媒介変数表示と見ることができ、 $s$  曲線 ( $t$  を固定) の決めるベクトル場  $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$  は曲線の接ベクトル場である。

また、変分  $\alpha(s, t)$  は曲線  $r(s)$  に沿ったベクトル場

$$W(s) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s, 0)$$

を定める。このベクトル場  $W(s)$  を変分  $\alpha$  の定める曲線  $r(s)$  上の変分ベクトル場という。

このように、変分が与えられれば変分ベクトル場が決まり逆に変分ベクトル場  $W(s)$  が与えられれば

$$\alpha(s, t) = \exp_{r(s)} t W(s)$$

で定義すれば  $\alpha$  は変分ベクトル場が  $W(s)$  の変分である。ただし写像  $\exp$  は次節で学ぶ。

なお、 $r(s) = \alpha(s, 0)$  は弧長変数であるが、 $t_0 \neq 0$  のとき曲線  $\alpha(s, t_0)$  は弧長変数とは限らないことに注意する。

変分  $\alpha(s, t)$  は  $t$  を固定すれば曲線を表しその弧長を  $L(t)$  とおく。すなわち

$$L(t) = \int_0^a \left| \frac{\partial \alpha(s, t)}{\partial s} \right| ds \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

によって定義される

$$L: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$

は  $t$  の関数である。

$L(t)$  の  $t$  による 1 次導関数  $L'(t)$  の  $t = 0$  における値  $L'(0)$  を曲線  $r(s)$  の弧長の第 1 変分という。これから、この第 1 変分を計算するが、この節では内幾何を用いる。これは、曲面上に限定した内幾何の方がはるかに計

算が楽だからです．といっても使う式は次のことです．証明を知りたい場合は内在幾何の部分を読み直してください．

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) \cdots (1) \\ & = \left( \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) \cdots (2) \\ & \frac{D}{\partial t} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) = \frac{D}{\partial s} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) \cdots (3) \end{aligned}$$

ただし  $\frac{D}{\partial t}$  は  $t$  による共変微分．共変微分というと難しそうですが，共変微分

$$\frac{D}{ds} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)$$

は普通微分（成分表示して，成分ごとの微分）

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)$$

の接平面への正射影のことです．以下の変形も，接平面の法線ベクトルを無視してよいことを考慮すれば納得できると思います．

なお，上記の (3) だけは明らかではなく， $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  より得られます．

弧長の第 1 変分  $L'(0)$  の計算に入る．なお，以下で  $(,)$  は内積である．

$$\begin{aligned} L(t) &= \int_0^a \left| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right| ds \\ &= \int_0^a \sqrt{\left( \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right)} ds \\ \text{より} \\ L'(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^a \left| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right| ds \\ &= \int_0^a \frac{d}{dt} \sqrt{\left( \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right)} ds \\ &= \int_0^a \frac{\left( \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right)}{\left| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|} ds \\ &= \int_0^a \frac{\left( \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right)}{\left| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|} ds \cdots (5) \end{aligned}$$

曲線  $r(s) = \alpha(s, 0)$  は弧長変数であるから  $\left| \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, 0) \right| = 1$ ．したがって

$$L'(0) = \int_0^a \left( \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) \Big|_{t=0} ds$$

さらに,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) \\ &= \left( \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} L'(0) &= \left[ \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) \right]_0^a - \int_0^a \left( \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) ds \\ &= - \int_0^a \left( \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) ds \end{aligned}$$

最後の等式は変分の定義より,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(a,0) = 0$$

が成り立つからである.

したがって, 曲線  $r(s)$  の加速度ベクトル場  $\frac{D}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial s} = A(s)$ , 変分ベクトル場  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = W(s)$  とおくと

$$L'(0) = - \int_0^a (A(s), W(s)) ds \quad \dots (6)$$

を得る.

(6) を曲線  $r(s)$  の第 1 変分公式という。(6) からすぐに分かることは,  $L'(0)$  の値は, 曲線  $r(s)$  に沿っての加速度ベクトル場  $A(s)$  と変分ベクトル場  $W(s)$  だけでできまり, 変分  $\alpha$  がどのようなものであるかは関係しない. 別の言い方をすれば, 異なる変分でも, その変分ベクトル場が同じなら  $L'(0)$  の値は変わらないことである.

第 1 変分公式から分かる次の命題は重要である.

命題

$r(s)$  は弧長変数の曲面  $S$  上の曲線である. このとき次が成り立つ.

$r(s)$  が測地線  $\Leftrightarrow r(s)$  の任意の変分  $\alpha$  で  $L'(0) = 0$  が成り立つ.

証明

$r(s)$  が測地線なら加速度ベクトル場  $A(s)$  は  $A(s) = 0$  であるから  $L'(0) =$

0 が成り立つ .

任意の変分で  $L'(0) = 0$  が成り立つとき . 変分ベクトル場  $W(s)$  を  $W(s) = f(s)A(s)$  で定める . ただし  $f(s)$  は

$$f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{で} \quad f(s) \geq 0, f(0) = f(a) = 0$$

を満たす関数.  $A(s)$  は曲線  $r(s)$  の加速度ベクトル場 .

この変分ベクトル場  $W(s)$  で決まる変分により

$$L'(0) = - \int_0^a (f(s)A(s), A(s))ds = - \int_0^a f(s)|A(s)|^2 ds = 0$$

$f(s)$  は条件を満たす範囲で任意にとることができるので

$$A(s) \equiv 0$$

が成り立つから  $r(s)$  が測地線であることが示された .

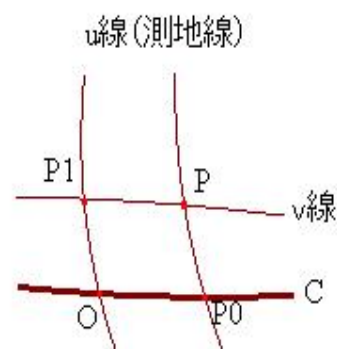
## 5 . 測地座標と測地線の性質 (一部書き直しました(2013年7月))

曲面を扱うとき , 座標曲線の与え方が問題を簡単にする鍵を握ることが多い . ここでは , 第1基本量を簡単にする座標曲線を考える .

まず , 半測地座標系を作る .

曲面  $S$  上の曲線  $C$  を1つ定め , この曲線の媒介変数を  $v$  とする . 曲線  $C$  上の各点で  $C$  と直交する測地線を引き , これらの測地線族を  $A$  とする . 曲面  $S$  の開領域  $U$  を十分小さくとれば , これらの測地線は  $U$  内では互いに交わらないし ,  $U$  のどの点も必ず一つの測地線が通るようにできる . つぎにこれらの測地

線族  $A$  に直交する曲線族を作る . これらの曲線族を  $B$  とする .  $U$  内には2つの曲線族  $A, B$  があり ,  $U$  上のどの点も , 各族それぞれ1つの曲線が通り , それらは直交している . ここで ,  $A$  に含まれる曲線を  $u$  線とし ,  $B$  に含ま



れる方を  $v$  線とする．この  $u$  線， $v$  線による座標系を半測地座標系という．  
 $u$  線  $v$  線は直交しているので，第 1 基本形式は  $F = 0$  すなわち

$$I = Edu^2 + Gdv^2$$

である．ここで， $u$  線に少し手を加える．

すでに，測地曲率で計算したように，第一基本形式が

$$I = Edu^2 + Gdv^2$$

のときの  $u$  線の測地曲率は

$$k_g = -\frac{E_v}{2\sqrt{G}}$$

である．いま， $u$  線が測地線であるから

$$k_g = 0$$

したがって，

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0$$

すなわち， $E(u, v)$  は  $u$  だけの関数  $E(u)$  である．したがって， $u$  線の座標を新しく弧長とすれば，第 1 基本形式は

$$I = du^2 + Gdv^2$$

である．この新しい座標系を測地座標系という．

測地座標を用いれば，2 点間の距離に関する測地線の次の重要性質は簡単に示すことができる．

命題 測地座標を作ることができる曲面上の十分小さな領域で，測地線は測地線上の 2 点間の最短距離を与える．すなわち 2 点を結ぶ曲面上の任意の曲線の中で測地線が最短の長さを与える．

証明

与えられた 2 点を結ぶ測地線を  $u$  線に含む測地座標系を作り，与えられた 2 点  $A, B$  の  $u$  座標をそれぞれ  $u_1, u_2$  ( $u_1 < u_2$ ) とする．このとき，2 点  $A, B$  を結ぶ任意の曲線  $v = v(u)$  の長さは

$$\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2} du$$

であり

$$\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2} du \geq \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1$$

等号が成り立つのは  $\frac{dv}{du} = 0$  すなわち与えられた測地線るときである。したがって測地線が最短の長さを与えることが証明された。

測地線の性質をもう少し続ける。

曲面  $S$  上の測地線  $(u^1(s), u^2(s))$  の微分方程式は

$$\frac{d^2 u^1}{ds^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2 u^2}{ds^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0$$

です。微分方程式より曲面  $S$  上の任意の点  $P$  に対して、 $P$  の近傍  $U$  と数  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  が存在して、各点  $Q \in U$  と  $|v| < \epsilon_1$  (ただし  $v \in T_Q(S)$ ) を満たす  $v$  に対して

$$r_v(0) = Q, \frac{dr_v}{ds}(0) = v$$

を満たすただ一つの測地線

$$r_v : (-2\epsilon_2, 2\epsilon_2) \longrightarrow S$$

が存在することが分かる。

$r(s)$  が測地線なら、 $a$  を定数とすると  $r(as)$  も測地線であるから、 $\epsilon$  を  $\epsilon = \epsilon_1 \epsilon_2$  とおくことにより次の命題が成り立つ。

命題

曲面  $S$  上の任意の点  $P$  に対して、 $P$  の近傍  $U$  と数  $\epsilon > 0$  が存在して、各点  $Q \in U$  と  $|v| < \epsilon$  (ただし  $v \in T_Q(S)$ ) を満たす  $v$  に対して

$$r_v(0) = Q, \frac{dr_v}{ds}(0) = v$$

を満たすただ一つの測地線

$$r_v : (-2, 2) \longrightarrow S$$

が存在する。



上の命題より,  $Q$  と  $v \in T_Q(S)$  に対して  $v$  の大きさが十分小さければ

$$r(0) = Q, \frac{dr}{ds}(0) = v$$

を満たす測地線

$$r : [0, 1] \longrightarrow S \cdots (1)$$

が存在する.

ここで  $r(1) \in S$  を点  $Q$  における接ベクトル  $v$  の指数写像といい  $\exp_Q(v)$  と表す.

$r(s)$  が測地線るとき  $a$  が定数なら  $r(as)$  も測地線であり, 微分方程式の解の一意性より測地線  $r(s)$  は

$$r(s) = \exp_Q(sv)$$

となる.

指数写像を利用して, 測地線の性質を調べよう.

曲面  $S : f(u^1, u^2)$  上の点  $P$  における接ベクトル  $v$  は  $(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2})$  を用いて

$$v = v^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + v^2 \frac{\partial}{\partial u^2}$$

と表せる.

曲面  $S$  上の各点  $P$  とその点の接ベクトル  $v \in T_P(S)$  のすべての対からなるものを  $T(S)$  とおく. すなわち

$$T(S) = \{(P, v) | P \in S, v \in T_P(S)\}$$

のことである.

点  $P$  を含む  $S$  における開領域を  $U$ ,  $U$  の座標系を  $u^1, u^2$  とすれば  $v \in T_Q(S)$  は

$$v = v^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + v^2 \frac{\partial}{\partial u^1}$$

と表せるから,  $\{u^1, u^2, v^1, v^2\}$  が  $T(U)$  の1つの座標系になる.

$T(U)$  のこの座標系を用いて測地線の性質を調べる.

各点  $P \in S$  に対して, 点  $(P, 0) \in T(S)$  を含む  $T(S)$  の十分小さな開領域  $V$  で写像

$$V \ni (Q, v) \longmapsto \exp_Q(v) \in S$$

が定義されることが上の命題より分かる .

ここで写像  $F : V \longrightarrow S \times S$

を

$$F(Q, v) = (Q, \exp_Q(v))$$

によって定義する . この写像をよく見よう .

$\exp_Q(v)$  は  $S$  上の点  $Q$  における接ベクトル  $v$  の測地線  $r(s)$  の  $r(1)$  の点である . すなわ 2 点  $Q, \exp_Q(v)$  は測地線で結ばれることが分かる . したがって ,  $F$  の像の要素を  $(R, T) \in S \times S$  とすると , 2 点  $R, T$  は最短な測地線で結ばれることがわかる . この事実をきちんと証明するのに使うのが逆関数の定理である . すなわち  $F$  のヤコビ行列式が 0 でないことを証明すれば局所的に逆関数が存在することが保証される .

$$F : V \longrightarrow S \times S$$

の  $(P, 0)$  におけるヤコビ行列式を計算しよう .

$$F(Q, v) = (Q, \exp_Q(v))$$

である . ここで

$$F^1(Q, v) = Q, F^2(Q, v) = \exp_Q(v)$$

ここ自明でないのは

$$\frac{\partial F^2}{\partial v_1}, \frac{\partial F^2}{\partial v_2}$$

だけである .

$P$  を通る方向ベクトル  $v = v^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + v^2 \frac{\partial}{\partial u^1}$  の測地線を

$$r(s) = (u^1(s), u^2(s))$$

とする .

$$u^1(s) = u^1(0) + (u^1)'(0)s + \frac{(u^1)''(0)}{2} s^2 + \dots$$

である . ここで , 測地線  $(u^1(s), u^2(s))$  は

$$\frac{d^2 u^1}{ds^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0 ,$$

$$\frac{d^2 u^2}{ds^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0$$

を満たし , 初期条件

$$\frac{du^1}{ds}(0) = v^1, \frac{du^2}{ds}(0) = v^2$$

より,

$$(u^1)'(0) = v_1, (u^1)''(0) = -\Gamma_{ij}^1 v^i v^j$$

したがって,

$$u^1(s) = u^1(0) + v_1 s - \frac{\Gamma_{ij}^1 v^i v^j}{2} s^2 + \dots$$

同様に

$$u^2(s) = u^2(0) + v_2 s - \frac{\Gamma_{ij}^2 v^i v^j}{2} s^2 + \dots$$

したがって,  $(P, 0)$  における  $F^2$  のヤコビ行列は

$$\frac{\partial F^2}{\partial(v^1, v^2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから,  $F$  のヤコビ行列は

$$\frac{\partial F}{\partial(u^1, u^2, v^1, v^2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり  $F$  は  $(P, 0) \in T(S)$  のある近傍  $V$  から  $(P, P) \in S \times S$  のある近傍の上への可微分同相写像であることが分かる. さらに,  $F$  によって

$$(Q, v) \mapsto (Q, \exp_Q(v))$$

であり,  $R = \exp_Q(v)$  とおけば 2 点  $Q, R$  は測地線  $\exp_Q(sv)$  で結ばれる. したがって,  $(P, P) \in S \times S$  の近傍として  $W \times W \subset F(V)$  をとればつぎのことがわかる.

命題

$S$  上の点  $P$  に対してある近傍  $W$  とある正の数  $\epsilon$  が存在して次が成り立つ.

(1)  $W$  の任意の 2 点は長さが  $\epsilon$  より小さい  $S$  の中のただ一つの測地線で結ばれる.

(2)(1) の測地線は端点の 2 点に滑らかに従属する. すなわち

$Q = \exp_P(v)$  とすると ,  
 $(P, Q) \mapsto (P, v)$   
は滑らかな写像である .

この (1),(2) は今までの議論の中で自由に使っていた内容である .