

8.2 ベクトル場とフロベニウスの定理

8.1 曲面の基本定理で証明した定理 1 をベクトル場及び微分形式の観点から見直します。なお，すでに証明した定理 1 は次の定理である。

定理 1

$U \subset \mathbb{R}^2, V \subset \mathbb{R}^3$ は開集合で，

$$f_p^i : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}, (i = 1, 2, 3, p = 1, 2)$$

は $U \times V$ で定義された偏導関数まで含めて連続とする ..

連立偏微分方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial x^i}{\partial u^p} = f_p^i(u^1, u^2, x^1, x^2, x^3), & (i = 1, 2, 3, p = 1, 2) \cdots (\#) \\ x^i(u_0^1, u_0^2) = x_0^i & i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

は， f_p^i が任意の i, p, q で

$$\frac{\partial f_p^i}{\partial u^q} - \frac{\partial f_q^i}{\partial u^p} + \frac{\partial f_p^i}{\partial x^j} f_q^j - \frac{\partial f_q^i}{\partial x^j} f_p^j = 0 \quad \cdots (b)$$

$$\left(\Leftrightarrow \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^p \partial u^q} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^q \partial u^p} \right)$$

を満たすとき，連立偏微分方程式 (#) の解が唯一存在する

この節ではベクトル場の観点から見直します。

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^p} = f_p^i(u^1, u^2, x^1, x^2, x^3), \quad (i = 1, 2, 3, p = 1, 2)$$

は任意の点 (x^1, x^2, x^3) において，任意の (u^1, u^2) に対して 2 つベクトル

$$\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1}, \frac{\partial x^2}{\partial u^1}, \frac{\partial x^3}{\partial u^1} \right), \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^2}, \frac{\partial x^2}{\partial u^2}, \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \right)$$

が決まる。これは，任意の (u^1, u^2) に対して，各点 (x^1, x^2, x^3) に平面を与えることを意味しています。すなわち，この偏微分方程式の解は，与えられた平面が接平面となる曲面を求めることを意味します。

言い方を少し変えれば， \mathbb{R}^3 に 2 つのベクトル場

$$X_1 = (f_1^1, f_1^2, f_1^3), X_2 = (f_2^1, f_2^2, f_2^3)$$

が与えられたとき，接ベクトル空間が X_1, X_2 の張る接ベクトル空間である曲面を求めることが，この偏微分方程式を解くことであり，その曲面が存在するための条件が可積分条件 (b) であることを意味しています．

また， $(u^1, u^2, x^1, x^2, x^3)$ で決まる \mathbb{R}^5 において，求まる平面は $(u^1, u^2, x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2))$

であるから，接ベクトル X_1, X_2 は \mathbb{R}^5 において

$$X_1 = (1, 0, f_1^1, f_1^2, f_1^3) = \frac{\partial}{\partial u^1} + f_1^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + f_1^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + f_1^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$$

$$X_2 = (0, 1, f_2^1, f_2^2, f_2^3) = \frac{\partial}{\partial u^2} + f_2^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + f_2^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + f_2^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$$

であることも注意する．

X_1, X_2 の成分に注目すると

$$\left\{ X_1, X_2, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\}$$

は線型独立で， \mathbb{R}^5 のベクトル場の基底になっている．もし分かりづらけ

れば，成分を並べた行列を考えればよい．実際その行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & f_1^1 & f_1^2 & f_1^3 \\ 0 & 1 & f_2^1 & f_2^2 & f_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．ここで，交換子積 $[X_1, X_2]$ を計算しよう．

$$[X_1, X_2] = \left[\frac{\partial}{\partial u^1} + f_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial u^2} + f_2^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right]$$

$$= \left(\frac{\partial f_2^i}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1^i}{\partial u^2} + f_1^j \frac{\partial f_2^i}{\partial x^j} - f_2^j \frac{\partial f_1^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

この式の係数は可積分条件です．

この式より，次の点に注目しましょう．

$[X_1, X_2]$ を基底 $\left\{ X_1, X_2, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\}$ で表すと，可積分条件は $\frac{\partial}{\partial x^i}$

の係数が 0 になることを意味し，逆に可積分条件を満たせば $\frac{\partial}{\partial x^i}$ の係数が 0 になる．

さらに $\frac{\partial}{\partial x^i}$ の係数が 0 になることは, X_1, X_2 の張るベクトル空間 $\{X_1, X_2\}$ が交換子積に関して閉じていることです.

すなわち,

2つのベクトル場 X_1, X_2 の張るベクトル空間が交換子積に関して閉じている \iff 偏微分方程式が可積分条件を満たす

成り立ちます. 交換子積は座標を用いない表現ですから, これは可積分条件の Intrinsic な表現です. これらの話を丁寧に述べていきます.

今まで述べたのは, ベクトル場が2つです. 与えられるベクトル場が1つだったらどうでしょう. これは, ベクトル場の積分曲線で, 常微分方程式を解くことにより存在することが分かります. これから扱うのは積分曲線の高次元での場合です.

問題は一般の次元で扱った方が内容が見やすくなるのでここでは, n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n で考えます. n 次元多様体の局所的な議論としても全く変わらずその方が一般的です.

まず定理 1 を一般の次元で書き直します.

定理 1'

$U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ は開集合で,

開集合 $U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数

$$f_i^p(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n), i = 1, \dots, m, p = 1, \dots, n$$

による連立偏微分方程式

$$\frac{\partial y^p}{\partial x^i} = f_i^p(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n), (i = 1, \dots, m, p = 1, \dots, n) \cdots (\#)$$

は, f_i^p が任意の i, j, p, q で

$$\frac{\partial f_i^p}{\partial x^j} - \frac{\partial f_j^p}{\partial x^i} + \frac{\partial f_i^p}{\partial y^q} f_j^q - \frac{\partial f_j^p}{\partial y^q} f_i^q = 0 \quad \cdots (b)$$

を満たすとき, 初期条件

$$y^p(x_0^1, \dots, x_0^m) = y_0^p \quad (p = 1, \dots, n)$$

に対して，初期条件を満たす連立偏微分方程式 (‡) の解が唯一存在する。

定理 1 の証明を見れば，定理 1' が成り立つことは分かります．実際，続けて， x^1, x^2 を固定して， x^3 に関する常微分方程式と考え，得られた解が可積分条件を用いて与えられた方程式を満たすことを確認してと繰り返しさえすればよい．

ベクトル場 X を与えるとは，各点に 1 次元接ベクトル空間を与えることです．まずこの定義を高次元に拡張します．

なお，以後 n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n を M と表します．慣れていけば， n 次元多様体の許容座標系で考えるとしてもよい．

定義

U を M の開集合とする． U の各点 P に $T_P(M)$ の r 次元部分ベクトル空間 $D^r(P)$ が定義されたとき， D^r を M の U 上における r 次元分布とよぶ．

次に分布の微分可能性の定義をする．なお，なめらかとは C^∞ を意味する．

定義

U 上の分布 D^r が与えられたとき， U 上の任意の点 P に対して，

$P \in V \subset U$

を満たす開集合 V が存在し， V 上のなめらかな r 個のベクトル場

X_1, \dots, X_r

が存在し， V 上の任意の点 Q で

$X_1(Q), \dots, X_r(Q)$

が $D^r(Q)$ の基底になる．言い方を変えれば $D^r(Q)$ が $X_1(Q), \dots, X_r(Q)$

で生成される．

このとき，分布 D^r を U 上のなめらかな分布という．

なお，分布 D^r が V 上

$$X_1, \dots, X_r$$

によって生成されるとき

$$D^r|_V = \text{Span}\{X_1, \dots, X_r\}$$

と表す．

ベクトル場 X が与えられれば， X に対する積分曲線がもちろん局所的ではあるが必ず存在する．この問題を高次元の場合にどうなるかを調べるのがこれからの問題である．

積分曲線を高次元に拡張した，積分多様体（積分曲面）を定義する．

定義

U 上の r 次元分布 D^r が与えられたとき， \mathbb{R}^m の開集合 N から U への埋め込み

$$f: N(\subset \mathbb{R}^m) \longrightarrow U$$

(ここで，埋め込みとは f は 1 対 1 かつ $\text{rank}(df) = m$ を満たすこと)

が存在し

$$df(T_P(N)) \subset D^r(f(P))$$

を満たすとき， m 次元曲面 $f(N)$ を r 次元分布 D^r の積分曲面または積分多様体と呼ぶ．当然のことであるが $m \leq r$ である．

ここで重要なのは， r 次元分布 D^r に対して r 次元の積分多様体が存在するかどうかである．もちろんこの場合は

$$df(T_P(N)) = D^r(f(P))$$

となる．

定義

U 上の r 次元分布 D^r が与えられたとき, U 上の任意の点 P に対して P を通る r 次元積分曲面 (多様体) が存在するとき, r 次元分布 D^r を完全積分可能という.

1 次元の積分曲線が存在するのはすでに述べたが, r 次元分布が完全積分可能になるための条件, これを可積分条件という, を調べよう.

命題

D^r を M の開集合上の r 次元分布とする. D^r が完全積分可能なら, D^r に属する任意のベクトル場 X, Y に対して X, Y の交換子積 $[X, Y]$ が D^r に属する.

証明

r 次元分布 D^r の積分多様体を

$$f: N(\subset \mathbb{R}^r) \longrightarrow U \subset M = \mathbb{R}^n$$

とする.

$$df: T_P(N) \longrightarrow D^r(P)$$

は同型写像である. したがって,

$$\forall X_1, X_2 \in D^r(U)$$

に対して, N 上のベクトル場 Y_1, Y_2 が存在して

$$df(Y_1) = X_1, df(Y_2) = X_2$$

を満たす.

Y_1, Y_2 は N 上のベクトル場であるから交換子積 $[Y_1, Y_2]$ は N 上のベクトル場であり,

$$df([Y_1, Y_2]) = [df(Y_1), df(Y_2)] = [X_1, X_2] \cdots (\#)$$

が成り立つから

$$[X_1, X_2] \in D^r(U)$$

である.

この証明に関して，2点注意が必要である．

まず，

$$df(Y) = X$$

としているが，一般に X を定めたとき Y が定まるとは限らないし， Y を定めたとき X が定まるとは限らない．

それは， f が1対1でないとき， $f(P) = f(Q)$ で $df(Y(P)) \neq df(Y(Q))$ のとき考えれば分かる．

この証明の中では， f は1対1で df は各点で

$$T_P(N) \longrightarrow D^r(f(P))$$

の同型写像であるから X に対して

$$df(Y) = X$$

を満たす Y が存在する．

もう一つ (#) で用いた

$$df([Y_1, Y_2]) = [df(Y_1), df(Y_2)]$$

は，交換子積の持つ重要性質でしばしば用いられる．一般的には次の形で書かれる．

補助命題

M, N を多様体 (M, N はユークリッド空間でよい) ．

$$f : M \longrightarrow N$$

をなめらかな写像とする．

X, Y は M のベクトル場， X', Y' は N のベクトル場で M 上の各点 P で

$$df(X(P)) = X'(f(P)), df(Y(P)) = Y'(f(P))$$

を満たすとき， M 上の任意の各点 P で

$$df([X, Y](P)) = [X', Y'](f(P))$$

が成り立つ．

証明

N 上の任意の関数 ϕ および M 上の任意の点 P に対して

$$\begin{aligned} & [X', Y'](f(P))\phi \\ &= X'(f(P))(Y'\phi) - Y'(f(P))(X'\phi) \\ &= df(X(P))(Y'\phi) - df(Y(P))(X'\phi) \\ &= X(P)((Y'\phi) \circ f) - Y(P)((X'\phi) \circ f) \\ &= X(P)(Y(\phi \circ f)) - Y(P)(X(\phi \circ f)) \\ &= [X, Y](P)(\phi \circ f) \\ &= df([X, Y](P))\phi \end{aligned}$$

したがって,

$$df([X, Y](P)) = [X', Y'](f(P))$$

だいぶ議論が見えてきました．命題より， r 次元分布 D^r が完全積分可能なら，

$$X, Y \in D^r \longrightarrow [X, Y] \in D^r$$

が成り立つことが分かりました．言い方を変えれば，交換子積が閉じているということもできるし， D^r が Lie 代数をなすということもできます．

定義

r 次元分布 D^r に属する任意のベクトル場 X, Y に対して，交換子積 $[X, Y]$ が常に分布 D^r に属するなら，この分布 D^r は Frobenius 条件を満たすという．

$\{X_1, \dots, X_r\}$ が分布 D^r を生成するとき，すなわち

$$D^r = \text{Span}\{X_1, \dots, X_r\}$$

のとき，任意の i, j で

$$[X_i, X_j] \in D^r$$

なら， D^r は Frobenius 条件を満たす．実際

$[fX_i, gX_j] = fg[X_i, X_j] + f(X_i g)X_j - g(X_j f)X_i \in D^r$
 より $[X_i, X_j] \in D^r$ なら $[fX_i, gX_j] \in D^r$ が成り立つ .

以上で準備がすみました . ここでの最大の目的はすでに示した命題の逆す
 なわち

定理

r 次元分布 D^r が Frobenius 条件を満たすなら完全積分可能である

を示すことです .

この定理の中核となる , 偏微分方程式の解の存在に関してはすでに証明されているので , 証明の残された部分は簡単です .

それでは証明を完成させましょう .

まず , 文字の確認をしよう .

いま考えている M は n 次元多様体で D^r はその r 次元分布である .

使う文字について

i, j, k は $1 \leq i, j, k \leq n$

a, b, c は $1 \leq a, b, c \leq r$

α, β, γ は $r + 1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n$

を動くとする .

ベクトル場 X_1, X_2, \dots, X_r が r 次元分布 D^r を生成するようにとる . す

なわち

$D^r = \text{Span}\{X_1, \dots, X_r\}$

X_a を許容座標系を用いて

$X_a = A_a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

と表す . すなわち

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_1^n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A_r^1 & \cdots & A_r^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

である .

行列 (A_a^i) の rank が r であるから , 第 1 列から第 r 列を r 次の正方行列とみてその行列が逆行列を持つとしてよい . その逆行列を $B = B_a^b$ とし , 新しいベクトル場 Y_a を

$$Y_a = B_a^b X_b$$

で定義する . 当然

$$D^r = \text{Span}\{Y_1, \dots, Y_r\}$$

であり , さらに

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_r \end{pmatrix} &= BA \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & C_1^{r+1} & \cdots & C_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & C_r^{r+1} & \cdots & C_r^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である . ただし $C_a^\alpha = B_a^b A_b^\alpha$

すなわち

$$Y_a = \frac{\partial}{\partial x^a} + C_a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

である . したがって ,

$$Y_1, \dots, Y_r, \frac{\partial}{\partial x^{r+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

は線形独立で M のベクトル場の基底をなす .

次に

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, f \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

が成り立つことを利用して $[Y_a, Y_b]$ を計算しよう .

$$\begin{aligned}
[Y_a, Y_b] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^a} + C_a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^b} + C_b^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right] \\
&= \left(\frac{\partial C_b^\alpha}{\partial x^a} - \frac{\partial C_a^\alpha}{\partial x^b} + C_a^\beta \frac{\partial C_b^\alpha}{\partial x^\beta} - C_b^\beta \frac{\partial C_a^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}
\end{aligned}$$

この式より $[Y_a, Y_b]$ は

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^r}$$

を含まない。Frobenius の条件より $[Y_a, Y_b]$ は Y_c で表せるから

$$[Y_a, Y_b] = 0$$

である。したがって

$$\frac{\partial C_b^\alpha}{\partial x^a} - \frac{\partial C_a^\alpha}{\partial x^b} + C_a^\beta \frac{\partial C_b^\alpha}{\partial x^\beta} - C_b^\beta \frac{\partial C_a^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$$

であり。この式こそが偏微分方程式の可積分条件である。

この

フロベニウス条件を満たす $\iff C_a^\alpha$ が可積分条件を満たす

が重要なところです。

さらに副産物として $\{X_1, \dots, X_r\}$ がフロベニウス条件を満たすとき，新しく得られた $\{Y_1, \dots, Y_r\}$ は任意の a, b で

$$[Y_a, Y_b] = 0$$

を満たすことが分かります。

偏微分方程式の言葉を用いれば，

Frobenius 条件を満たす r 個のベクトル場

$$\{X_1, \dots, X_r\}$$

が任意の a, b で

$$[X_a, X_b] = 0$$

をなすとき，このベクトル場はヤコビ系をなすまたは対合 (involutive) をなすという。

ここまで述べた議論より，

命題

Frobenius 条件を満たすベクトル場系よりヤコビ系をなすベクトル場系を

作ることができる

が成り立つことが分かる．

それでは証明を完成させよう．

$$D^r = \text{Span}\{Y_1, \dots, Y_r\}$$

である．

一方連立偏微分方程式

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^a} = C_a^\alpha(x^1, \dots, x^n)$$

は，可積分条件を満たすから，初期条件を与えれば解が存在しそれを

$$f^1(x^1, \dots, x^r), \dots, f^{n-r}(x^1, \dots, x^r)$$

と書く．

すなわち，ベクトル場 Y_1, \dots, Y_r に対して r 次元曲面

$$(x^1, \dots, x^r) \mapsto (x^1, \dots, x^r, f^1(x^1, \dots, x^r), \dots, f^{n-r}(x^1, \dots, x^r))$$

が求める積分多様体である．

以上で証明が終了した．

いくつか例を挙げよう．ここでの例は

藤原松三郎 微分積分学第2巻 内田老鶴圃

で扱われているものである．あわせて参考にされるとよいと思う．

例1 \mathbb{R}^4 において分布が

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} + (x^3 + 3(x^1)^2) \frac{\partial}{\partial x^4} \\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^4} \\ X_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^4} \\ x^4(0, 0, 0) = 0 \end{cases}$$

で与えられているとき，この分布の積分多様体をもとめよう．

まず，求める多様体 $x^4(x^1, x^2, x^3)$ が求まればその多様体は \mathbb{R}^4 で $(x^1, x^2, x^3, x^4(x^1, x^2, x^3))$

であるから，この多様体の接ベクトル空間は

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^4}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^4} \\ Y_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial x^4}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^4} \\ Y_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial x^4}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial x^4} \end{cases}$$

によって得られる．すなわち，接空間が $\{X_1, X_2, X_3\}$ で定まる多様体を

求めることは，連立偏微分方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial x^4}{\partial x^1} = x^3 + 3(x^1)^2 \\ \frac{\partial x^4}{\partial x^2} = x^2 \\ \frac{\partial x^4}{\partial x^3} = x^1 \\ x(0, 0, 0) = 0 \end{cases}$$

を解くことである．

これらのベクトル場はヤコビ系をなす．実際自明でないのは $[X_1, X_3]$ だけで

$$[X_1, X_3] = 0$$

も簡単に示すことができる．

可積分条件を満たすことが分かったので，後は常微分方程式と考える解けばよい．

$x^2 = 0, x^3 = 0$ を固定し $x^1 = t$ とおき

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 3t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

を解くと

$$y(t) = t^3$$

をえる．次に初期条件

$$x^4(x^1, 0, 0) = (x^1)^3$$

のもとで $x^2 = t$ とおいてすなわち

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = t \\ z(0) = (x^1)^3 \end{cases}$$

を解く .

$$z(t) = \frac{t^2}{2} + (x^1)^3$$

したがって

$$x^4(x^1, x^2, 0) = \frac{(x^2)^2}{2} + (x^1)^3$$

後は同様に

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = x^1 \\ w(0) = \frac{(x^2)^2}{2} + (x^1)^3 \end{cases}$$

を解くと

$$w(t) = tx^1 + \frac{(x^2)^2}{2} + (x^1)^3$$

t を x^3 と置き換えて

$$x^4(x^1, x^2, x^3) = x^3x^1 + \frac{(x^2)^2}{2} + (x^1)^3$$

これが解である .

このように , 1 階の偏微分方程式は可積分条件を満たせば , 常微分方程式の問題で , 常微分方程式はパソコンを用いれば比較的容易に正確な解がもとめられる . ここで扱っている連立線型 1 階偏微分方程式は解が求められる場合が多い .

例 2

$$\begin{cases} X_1 = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^4 \frac{\partial}{\partial x^4} \\ X_2 = (x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + (x^2)^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + (x^3)^2 \frac{\partial}{\partial x^3} + (x^4)^2 \frac{\partial}{\partial x^4} \end{cases}$$

を解く .

まず , 可積分条件を確認しよう .

$$[X_1, X_2] = X_2$$

であるから , 可積分条件を満たすことが分かる .

X_1, X_2 を成分に注目し

$$A = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ (x^1)^2 & (x^2)^2 & (x^3)^2 & (x^4)^2 \end{pmatrix}$$

と表す .

第 1 列 , 第 2 列よりなる正方行列の逆行列を $B = (b_a^b)$ とおくと

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{x^3(x^2 - x^3)}{x^1(x^2 - x^1)} & \frac{x^4(x^2 - x^4)}{x^1(x^2 - x^1)} \\ 0 & 1 & \frac{x^3(x^1 - x^3)}{x^2(x^1 - x^2)} & \frac{x^4(x^1 - x^4)}{x^2(x^1 - x^2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

で Y_1, Y_2 を定義すれば

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{x^3(x^2 - x^3)}{x^1(x^2 - x^1)} \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{x^4(x^2 - x^4)}{x^1(x^2 - x^1)} \frac{\partial}{\partial x^4}$$

$$Y_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{x^3(x^1 - x^3)}{x^2(x^1 - x^2)} \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{x^4(x^1 - x^4)}{x^2(x^1 - x^2)} \frac{\partial}{\partial x^4}$$

であり , $\{X_1, X_2\}$ と $\{Y_1, Y_2\}$ は同じベクトル空間であるから , ベクトル空間 $\{Y_1, Y_2\}$ もフロベニウス条件を満たし , ベクトル場の形からヤコビ系をなすことが分かる .

解くべき偏微分方程式系は

$$\begin{cases} \frac{\partial x^3}{\partial x^1} = \frac{x^3(x^2 - x^3)}{x^1(x^2 - x^1)}, & \frac{\partial x^4}{\partial x^1} = \frac{x^4(x^2 - x^4)}{x^1(x^2 - x^1)} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^2} = \frac{x^3(x^1 - x^3)}{x^2(x^1 - x^2)}, & \frac{\partial x^4}{\partial x^2} = \frac{x^4(x^1 - x^4)}{x^2(x^1 - x^2)} \end{cases}$$

よく見ると , x^3, x^4 は独立し同じ方程式である (定数の差だけ) . したがって片方だけ解けばよい .

ここでは

$$\begin{cases} \frac{\partial x^3}{\partial x^1} = \frac{x^3(x^2 - x^3)}{x^1(x^2 - x^1)} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^2} = \frac{x^3(x^1 - x^3)}{x^2(x^1 - x^2)} \\ x^3(1, 2) = 3 \end{cases}$$

を解く .

$x^2 = 2, x^1 = t, x^3 = y$ として

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(2 - y)}{t(2 - t)}$$

$$\frac{dy}{y(2 - y)} = \frac{dt}{t(2 - t)}$$

より

$$\frac{y(2 - t)}{t(2 - y)} = C$$

を得る . $t = 1, y = 3$ を代入し $C = -3$. t, y をそれぞれ x^1, x^3 に戻し x^3

について解くと

$$x^3(x_1, 2) = \frac{3x^1}{2x^1 - 1} \quad \dots (1)$$

次に x^1 を固定し $x^2 = t, x^3 = z$ として

$$\frac{dz}{dt} = \frac{z(x^1 - z)}{t(x^1 - t)}$$

を解き t, z を元に戻すと

$$\frac{x^3(x^1 - x^2)}{x^2(x^1 - x^3)} = C'$$

初期条件より

$$\frac{x^3(x^1 - x^2)}{x^2(x^1 - x^3)} = \frac{3}{4}$$

最後に , 可積分条件を満たさない偏微分方程式系を解くとどうなるかを調べよう .

例 3

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2y \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x \\ z(1, 1) = 1 \end{cases}$$

を考えよう．

条件を満たす $z(x, y)$ が存在すると

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1$$

となり，解が存在しないことが分かる．

ベクトル場の交換子積を調べよう．偏微分方程式に対応するベクトル場は

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial z}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$$

である．まず，3つのベクトル場

$$X_1, X_2, \frac{\partial}{\partial z}$$

が基底になっていることに注意する．

$$[X_1, X_2] = \left[\frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} \right] = -\frac{\partial}{\partial z}$$

である．したがって，交換子積は閉じていないので，可積分条件を満たさないことがある．

実際にこの方程式を解いてみよう．

$y = 1$ を固定すると

$$\frac{dw}{dt} = 2, w(1) = 1$$

より

$$w(t) = 2t - 1$$

文字を戻して

$$z(x, 1) = 2x - 1$$

次に x 固定し

$$\frac{dw}{dt} = x, w(1) = 2x - 1$$

を解くと

$$w(t) = tx + x - 1$$

$$\therefore z(x, y) = xy + x - 1$$

得られた解は微分方程式の第 2 式は満たすが第 1 式は満たさない。

同様に第 2 式, 第 1 式の順に解けば

$$z(x, y) = 2xy - y$$

となる, 2 つの解は一致しない。

(ベクトル場とフロベニウスの定理項目終わり)