

7. 曲面の第1基本形式と 第2基本形式の関係

これまで、曲面 $f(u, v)$ があたえられたとき、第1基本形式

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

が定義でき、いろいろな量を計算してきました。

すなわち、

曲面 $f(u, v)$ から E, F, G, L, M, N

が決まり、実際の計算は、2次元ユークリッド平面 (u, v) の各点に E, F, G, L, M, N が定義されたものとして扱っているのです。

当然逆が成り立つかは興味ある問題です。すなわち

問題

2次元ユークリッド空間 (u, v) に6つの関数 E, F, G, L, M, N を定義したとき、第1, 第2基本形式が①, ②で与えられる曲面 $f(u, v)$ が唯一つ存在するか

です。この問題を曲面の基本定理といいます。結論を先に言ってしまうと、この定理はある条件のもとで正しいのです。証明は偏微分方程式を解く問題に帰着され、ここでは偏微分方程式の理論には触れず、偏微分方程式が解けるための条件を証明することだけをきちんと示します。

偏微分方程式は後で触れるとして、問題を眺めてみましょう。

曲面

$$f(u, v) = (f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v))$$

を求めるとは、3つの関数 $f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v)$ を求めることです。一方条件を見ると $E(u, v), F(u, v), G(u, v), L(u, v), M(u, v), N(u, v)$ と6つあります。たとえば、3元連立方程式なのに、条件が6つもあるようなものです。方程式でも微分方程式でもこれはおかしいことです。

そこで、まず $E(u, v), F(u, v), G(u, v), L(u, v), M(u, v), N(u, v)$ の関係式を調べます。なお、そこから出てくる関係式が、偏微分方程式の解を持つための条件と一致することが分かります。うまくいっているものなのです。

さて、本論に入りましょう。

まず、これからの計算のために、記号を少し変えます。

今まで、曲面を

$$f(u, v) = (f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v))$$

のように表しましたが、これからは座標変数は u^1, u^2 を用い

$$f(u^1, u^2) = (f^1(u^1, u^2), f^2(u^1, u^2), f^3(u^1, u^2))$$

のように異なる文字を表す数字は上に書きます。右下に使う数字はすべて偏微分に用います。当然2乗や3乗を用いるときもありますが、そのときはたとえば

$(f^1(u^1, u^2))^2$ のように必ず括弧を使います。

つぎに和についてですが、指標の1と2の和をとることが非常に多いので、式の上下に重複して同じ文字があるとき、その文字の1と2の和をとることにします。この規則をアインシュタインの規約といいます。

たとえば、 $a_1 b^1 + a_2 b^2$ は $a_i b^i$ と表します。最初はびっくりしますがすぐなれとても便利です。

第1基本量 E, F, G, 第2基本量 L, M, N は

$$E = g_{11}, F = g_{12} = g_{21}, G = g_{22}$$

$$L = h_{11}, M = h_{12} = h_{21}, N = h_{22}$$

とします。すなわち第1基本形式 I, 第2基本形式 II は次のようになります。

$$I = g_{ij} du^i du^j$$

$$II = h_{ij} du^i du^j$$

$$\text{さらに, } g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2, h = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$$

とします。

また、2行2列の行列 (g_{ij}) の逆行列を (g^{ij}) で表します。

すなわち

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立ちます。

これからの内容は次の通りです。まず、 f の偏導関数 f_i, f_{ij}, f_{ijk} は

$$f_i = \left(\frac{\partial f^1}{\partial u^i}, \frac{\partial f^2}{\partial u^i}, \frac{\partial f^3}{\partial u^i} \right)$$

$$f_{ij} = \left(\frac{\partial^2 f^1}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial^2 f^2}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial^2 f^3}{\partial u^i \partial u^j} \right)$$

$$f_{ijk} = \left(\frac{\partial^3 f^1}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}, \frac{\partial^3 f^2}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}, \frac{\partial^3 f^3}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} \right)$$

のことです。このとき、 $f_1, f_2, \mathbf{n} = f_1 \times f_2 / |f_1 \times f_2|$ は1次独立ですから、それらで任意のベクトルが表せます。そこで、 f_{ij}, f_{ijk} を f_1, f_2, \mathbf{n} で表すことを通じて g_{ij}, h_{ij} の関係を求めます。

それでははじめます。

f_{ij} は f_1, f_2, \mathbf{n} で表せますから

$$f_{ij} = \Gamma_{ij}^k f_k + H_{ij} \mathbf{n}$$

とおきます。ここで、 $f_{ij} \cdot \mathbf{n} = h_{ij}$ ですから (定義),

$$H_{ij} = f_{ij} \cdot \mathbf{n} = h_{ij}$$

が成り立ちます。

$\therefore \mathbf{f}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{f}_k + h_{ij} \mathbf{n}$
 $\mathbf{f}_{ij} = \mathbf{f}_{ji}$ ですから $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ が成り立ちます。

次に Γ_{ij}^k を求めます。

求める方針は、 $\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$ の両辺を u_k で偏微分することです。

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial u^k} = \mathbf{f}_{ik} \cdot \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_{jk}$$

$$= \Gamma_{ik}^m \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_i \cdot \Gamma_{jk}^m \mathbf{f}_m \quad (\because \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{n} = 0)$$

$$= g_{mj} \Gamma_{ik}^m + g_{im} \Gamma_{jk}^m$$

ここで

$$g_{km} \Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ij, k}$$

と書けば

$$= \Gamma_{ik, j} + \Gamma_{jk, i}$$

となる。

ここで $\Gamma_{ik, j} = \Gamma_{ki, j}$ より

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{jk, i} + \Gamma_{ki, j} \quad \dots \textcircled{1}$$

とすると見やすい。

i, j, k を入れ替えて

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{ik}}{\partial u^j} = \Gamma_{kj, i} + \Gamma_{ji, k} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{jk}}{\partial u^i} = \Gamma_{ki, j} + \Gamma_{ij, k} \quad \dots \textcircled{3}$$

②+③-①より

$$\Gamma_{ij, k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial \mathbf{g}_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial u^k} \right)$$

を得る。したがって

$$\Gamma_{ij}^k = g^{km} \Gamma_{ij, m} \\ = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial \mathbf{g}_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial u^m} \right)$$

を得る。この Γ_{ij}^k をクリストッフエルの3添字記号という。なお、式から分かるように Γ_{ij}^k は第1基本形式 g_{ij} だけで決まる。このことは重要なことです。

次に法線ベクトル \mathbf{n} について同じことを行います。

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \text{ より } \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n} = 0.$$

ここで,

$$\mathbf{n}_i = A_i^k \mathbf{f}_k$$

とおきます.

$$\text{一方 } \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ より } \mathbf{f}_{ij} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{n}_j = 0$$

$$\therefore h_{ij} = \mathbf{f}_{ij} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_{ji} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{n}_i = -A_i^k g_{jk}$$

$$\therefore A_i^j = -h_{ik} g^{kj}$$

したがって

$$\mathbf{n}_i = -h_{ik} g^{kj} \mathbf{f}_j$$

を得る.

以上で

$$\mathbf{f}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{f}_k + h_{ij} \mathbf{n} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\mathbf{n}_i = -h_{ik} g^{kj} \mathbf{f}_j \quad \dots \textcircled{2}$$

を得ました. ①をガウスの誘導方程式, ②をワインガルデンの誘導方程式といいます.

各点で, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{n}\}$ で表せるので, ①, ②の関係式さえ分かればどんな微分でも出来るわけです. 曲線論で言えばフレネの公式です.

次に, さらに微分します. その中で g_{ij} と h_{ij} の関係が求まります.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ijk} &= (\mathbf{f}_{ij})_k = (\Gamma_{ij}^m \mathbf{f}_m + h_{ij} \mathbf{n})_k \\ &= (\Gamma_{ij}^m)_k \mathbf{f}_m + \Gamma_{ij}^m \mathbf{f}_{mk} + (h_{ij})_k \mathbf{n} + h_{ij} \mathbf{n}_k \\ &= (\Gamma_{ij}^m)_k \mathbf{f}_m + \Gamma_{ij}^m (\Gamma_{mk}^n \mathbf{f}_n + h_{mk} \mathbf{n}) \\ &+ (h_{ij})_k \mathbf{n} - h_{ij} h_{km} g^{mn} \mathbf{f}_n \\ &= \{(\Gamma_{ij}^m)_k + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nk}^m - h_{ij} h_{kn} g^{nm}\} \mathbf{f}_m \\ &+ \{\Gamma_{ij}^m h_{mk} + (h_{ij})_k\} \mathbf{n} \end{aligned}$$

j と k を交換すれば

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ikj} &= \{(\Gamma_{ik}^m)_j + \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nj}^m - h_{ik} h_{jn} g^{nm}\} \mathbf{f}_m \\ &+ \{\Gamma_{ik}^m h_{mj} + (h_{ik})_j\} \mathbf{n} \end{aligned}$$

$\mathbf{f}_{ijk} = \mathbf{f}_{ikj}$ より

$$\begin{aligned} &(\Gamma_{ij}^m)_k - (\Gamma_{ik}^m)_j + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nk}^m - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nj}^m \\ &- h_{ij} h_{kn} g^{nm} + h_{ik} h_{jn} g^{nm} = 0 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$(h_{ij})_k - (h_{ik})_j + \Gamma_{ij}^m h_{mk} - \Gamma_{ik}^m h_{mj} = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

③をガウスの積分可能条件, ④をコダッチの積分可能条件といいます.

積分可能条件という理由は, 後で第1, 2基本形式より偏微分方程式を解くことにより曲面を求めるのですが, 偏微分が解けるための条件が③, ④であることが示されます. 偏微分方程式が解けるための条件を積分可能条件といいます.

③, ④の中で独立な式がいくつあるかを調べましょう.

$j = k$ の時は恒等式ですから $j = 1, k = 2$ だけ調べればよい.

④のコダッチの積分可能条件を調べると

$i = 1, j = 1, k = 2$ のときが

$$(h_{11})_2 - (h_{12})_1 + \Gamma_{11}^m h_{m2} - \Gamma_{12}^m h_{m1} = 0$$

で $i = 2, j = 1, k = 2$ のときが

$(h_{21})_2 - (h_{22})_1 + \Gamma_{21}^m h_{m2} - \Gamma_{22}^m h_{m1} = 0$
 である。この2つの条件がコダッチの積分可能条件です。

次のガウスの積分可能条件を調べます。

$$(\Gamma_{ij}^m)_k - (\Gamma_{ik}^m)_j + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nk}^m - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nj}^m - h_{ij} h_{kn} g^{nm} + h_{ik} h_{jn} g^{nm} = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

クリストッフェル記号は第一基本形式 g_{ij} だけで決まる量です。したがって、最初の4項は第1基本形式だけで決まり、あとの2項は第1, 第2基本形式両方関係しています。

③より少なくとも第1基本量と第2基本量に関係があることが分かります。これが、思わぬ結果に発展し、ガウスをして「最もすばらしい定理(Theorem egregium)」と言わしめた定理に到達します。計算は少し面倒ですがもう少しです。

③を計算するために、③の前半の4項を

$$R^m_{ijk} = (\Gamma_{ij}^m)_k - (\Gamma_{ik}^m)_j + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nk}^m - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nj}^m \quad \dots \textcircled{5}$$

とおき、さらに

$$R_{nik} = g_{nm} R^m_{ijk} \quad \dots \textcircled{6}$$

と定義します。⑤を第2曲率テンソルといい、⑥を第1曲率テンソルといいます。

⑤, ⑥は共に曲面の第1基本形式より決まります。

$$(g_{nm} \Gamma_{ij}^m)_k = (g_{mn})_k \Gamma_{ij}^m + g_{mn} (\Gamma_{ij}^m)_k$$

より

$$g_{mn} (\Gamma_{ij}^m)_k = (g_{nm} \Gamma_{ij}^m)_k - (g_{mn})_k \Gamma_{ij}^m \\ = (\Gamma_{ij, n})_k - \Gamma_{ij}^m (\Gamma_{nk, m} + \Gamma_{km, n})$$

(\because この節の最初のほうの $\Gamma_{nk, m}$ の定義を参照)

したがって、

$$R_{nik} = g_{nm} R^m_{ijk} \\ = (\Gamma_{ij, n})_k - \Gamma_{ij}^m (\Gamma_{nk, m} + \Gamma_{km, n}) \\ - (\Gamma_{ik, n})_j + \Gamma_{ik}^m (\Gamma_{nj, m} + \Gamma_{jm, n}) \\ + (\Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk, n} - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj, n}) \\ = (\Gamma_{ij, n})_k - (\Gamma_{ik, n})_j - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{nk, m} + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{nj, m} \\ = \{(g_{jn})_{ik} + (g_{ni})_{jk} - (g_{ij})_{nk} \\ - (g_{kn})_{ij} - (g_{ni})_{kj} + (g_{ik})_{nj}\} / 2 \\ - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{nk, m} + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{nj, m}$$

したがって、

$$R_{nik} = \{(g_{jn})_{ik} - (g_{ij})_{nk} - (g_{kn})_{ij} + (g_{ik})_{nj}\} / 2 \\ - g^{pm} (\Gamma_{ij, p} \Gamma_{nk, m} - \Gamma_{ik, p} \Gamma_{nj, m}) \\ = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 g_{jn}}{\partial u_i \partial u_k} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u_n \partial u_k} - \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial u_i \partial u_j} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u_n \partial u_j} \right\} \\ - g^{pm} (\Gamma_{ij, p} \Gamma_{nk, m} - \Gamma_{ik, p} \Gamma_{nj, m})$$

となる。

式から分かるように、第1曲率テンソル R_{nik} は前の2つ n, i を交換すると符号が変

るし、後の2つj, kを交換しても符号が変る. すなわち

$$R_{nijk} = -R_{inj k}, \quad R_{nijk} = -R_{nikj}$$

したがって、 $n = i, j = k$ のときは $R_{nijk} = 0$.

0でない第一曲率テンソルは

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}$$

だけである.

以上の計算のもとで、ガウスの可積分条件

$$(\Gamma_{ij}^m)_k - (\Gamma_{ik}^m)_j + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nk}^m - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nj}^m - h_{ij} h_{kn} g^{nm} + h_{ik} h_{jn} g^{nm} = 0$$

を見直すと

$$R_{mijk} - h_{ij} h_{kn} g^{nm} + h_{ik} h_{jn} g^{nm} = 0$$

g_{mp} をかけて

$$g_{mp} (R_{mijk} - h_{ij} h_{kn} g^{nm} + h_{ik} h_{jn} g^{nm}) = 0$$

$$R_{pijk} - h_{ij} h_{kn} \delta^np + h_{ik} h_{jn} \delta^np = 0$$

$$\therefore R_{pijk} - h_{ij} h_{kp} + h_{ik} h_{jp} = 0$$

したがって、ガウスの可積分条件はただ一つの式で

$$R_{1221} = h_{22} h_{11} - (h_{12})^2$$

となることが分かりました.

以上のことからコダッチの方程式が2個、ガウスの方程式が1個、合わせて3個がわかりました. この章の最初で、条件が6つE,F,G,L,M,Nに対して3つの関数 f^1, f^2, f^3 を求めると書きましたが、3つの関係式があり釣り合いがとれています.

後はまとめです. 曲面の全曲率をKとすると

$$K = \frac{h_{11} h_{22} - h_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = \frac{R_{1221}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \quad \dots \textcircled{7}$$

となりました.

この等式⑦がガウスをしてもっともすばらしい定理(Theorem egregium)と言わしめた式です.

簡単に説明します.

左辺の全曲率とは、その点の法曲率の最大値と最小値の積です. 円柱面と平面を第1基本形式が保たれる対応させるとき、円柱上の円や円柱螺旋が平面では直線にうつります. このことから分かるように、曲線の曲率や捩率は第1基本形式が同じでも保たれません. ここで、第1基本形式より決まる量を内在量というとき、曲率や捩率は内在量ではありません. その曲率を用いて定義した全曲率がなんと第1基本形式だけから決まる量すなわち内在量である.

という意味です. なお、平均曲率Hは内在量ではありません.

この節の最後で曲率テンソル R_{1221} を便利な座標である曲率線座標および測地線座標の

とき計算しておく．これはあとで，負の定曲率曲面の全曲率を計算するときやガウス－ボンネの定理の証明のとき用います，

$$R_{1221} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial u_2 \partial u_1} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u_1 \partial u_1} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial u_1 \partial u_2} \right\} - (\Gamma_{22,p} \Gamma_{11}^p - \Gamma_{21,p} \Gamma_{12}^p)$$

です．

曲率線座標は

$$I = E du^2 + G dv^2$$

より $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = G$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= E_1 / (2E), \quad \Gamma_{11}^2 = -E_2 / (2G), \quad \Gamma_{12}^1 = E_2 / (2E), \\ \Gamma_{12}^2 &= G_1 / (2G), \quad \Gamma_{22}^1 = -G_1 / (2E), \quad \Gamma_{22}^2 = G_2 / (2G) \\ \Gamma_{11,1} &= E_1 / 2, \quad \Gamma_{11,2} = -E_2 / 2, \quad \Gamma_{12,1} = E_2 / 2 \\ \Gamma_{12,2} &= G_1 / 2, \quad \Gamma_{22,1} = -G_1 / 2, \quad \Gamma_{22,2} = G_2 / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1221} &= (-E_{vv} - G_{uu}) / 2 \\ &- (-G_1 / 2) \cdot (E_1 / (2E)) - (G_2 / 2) \cdot (-E_2 / (2G)) \\ &+ (E_2 / 2) \cdot (E_2 / (2E)) + (G_1 / 2) \cdot (G_1 / (2G)) \\ &= (-E_{vv} - G_{uu}) / 2 \\ &+ (G_1 / 2) \cdot (E_1 / (2E)) + (G_2 / 2) \cdot (E_2 / (2G)) \\ &+ (E_2 / 2) \cdot (E_2 / (2E)) + (G_1 / 2) \cdot (G_1 / (2G)) \end{aligned}$$

となります．

さらに， $I = du^2 + G dv^2$ のときは

$$\begin{aligned} R_{1221} &= -G_{11} / 2 + (G_1 / 2) \cdot (G_1 / 2G) \\ &= -\frac{G_{11}}{2} + \frac{G_1^2}{4G} \end{aligned}$$

$$\text{一方 } (\sqrt{G})_{11} = \frac{G_{11}}{2\sqrt{G}} - \frac{(G_1)^2}{4G\sqrt{G}}$$

より

$$R_{1221} = -(\sqrt{G})_{11} \sqrt{G}$$

を得る．

全曲率Kは

$$K = R_{1221} / g$$

より $g = G$ であるから

$$K = - \frac{\sqrt{G_{11}}}{\sqrt{G}}$$

この式は、ガウス-ボンネの定理で用いられる。

例 E, F, G, L, M, Nは任意でないことの例を挙げましょう。

E=G=1, F=0, L=1, M=0として, Nを調べてみよう。ガウスの可積分条件より

$$(\Gamma_{ij}^m)_k - (\Gamma_{ik}^m)_j + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nk}^m - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nj}^m - h_{ij} h_{kn} g^{nm} + h_{ik} h_{jn} g^{nm} = 0$$

で Γ_{ij}^k はすべて0より, $i, j=1, m=k=2$ で確かめると

$$-h_{11} h_{22} + h_{12} h_{12} = 0$$

より $h_{22}=0$ を得る。したがって, $h_{22} \neq 0$ のとき曲面が存在しないことが分かる。

(曲面の第1基本形式と第2基本形式の関係の項目終わり)