

2 交代テンソル

2.1 交代テンソル

V を n 次元ベクトル空間, V の双対空間を V^* とする. このとき, テンソル空間

$$V_r^s = \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^s \otimes \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^r$$

を s 階反変, r 階共変の (s, r) 型テンソル空間という.

ここでは,

$$V_r (= V_r^0) = \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^r$$

すなわち, r 階の共変テンソルを扱う. 以下共変テンソルを主に扱うので, r 階共変テンソルを単に r 階テンソルという.

ちなみに $V_r = L(V, \dots, V; \mathbb{R})$ である.

定義

$f \in V_r$ が任意の $X_1, X_2, \dots, X_r \in V$ に対して,

$$f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_r) = f(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_r)$$

を満たすとき, テンソル f を対称テンソルといい,

$$f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_r) = -f(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_r)$$

を満たすとき, テンソル f を交代テンソルという.

以下, $\{1, 2, \dots, r\}$ の置換群を S_r で表し, 置換 $\sigma \in S_r$ の符号を $\epsilon(\sigma)$ で表す. すなわち,

$$\epsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma \text{ が偶置換}) \\ -1 & (\sigma \text{ が奇置換}) \end{cases}$$

とする. また, ベクトル空間 V の基底として

e_1, \dots, e_n

を取り, その双対基底を

$\omega^1, \dots, \omega^n$

とする.

対称テンソル, 交代テンソルを置換 σ を用いて定義すると次のようになる.

定義

$f \in V_r$ が任意の $X_1, X_2, \dots, X_r \in V$ および任意の $\sigma \in S_r$ に対して

$$f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(r)}) = f(X_1, X_2, \dots, X_r)$$

を満たすとき, テンソル f を対称テンソルといい,

$$f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(r)}) = \epsilon(\sigma) f(X_1, X_2, \dots, X_r)$$

を満たすとき, テンソル f を交代テンソルという.

見方を変えて次のように書くこともできる.

$f \in V_r, \sigma \in S_r$ に対して, 新しいテンソル $\sigma(f)$ を

$$\sigma(f)(X_1, X_2, \dots, X_r) = f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(r)})$$

によって定義すれば, テンソルが対称テンソルであるための必要十分条件は任意の置換 σ に対して

$$\sigma(f) = f$$

を満たすことであり, 交代テンソルであるための必要十分条件は任意の置換 σ に対しては

$$\sigma(f) = \epsilon(\sigma) f$$

を満たすことである.

ここで $\sigma(f)$ を基底を用いて表そう.

$f \in V_3$ とする.

$$f = f_{i_1 i_2 i_3} \omega^{i_1} \otimes \omega^{i_2} \otimes \omega^{i_3}$$

のとき.

$$\sigma(f)(X_1, X_2, X_3)$$

$$= f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)})$$

$$= f_{i_1 i_2 i_3} \omega^{i_1}(X_{\sigma(1)}) \omega^{i_2}(X_{\sigma(2)}) \omega^{i_3}(X_{\sigma(3)})$$

$\tau = \sigma^{-1}$ とする

$$= f_{i_1 i_2 i_3} \omega^{i_{\tau(1)}}(X_1) \omega^{i_{\tau(2)}}(X_2) \omega^{i_{\tau(3)}}(X_3)$$

したがって

$$\sigma(f) = f_{i_1 i_2 i_3} \omega^{i_{\tau(1)}} \otimes \omega^{i_{\tau(2)}} \otimes \omega^{i_{\tau(3)}}$$

である。 $r = 3$ のとき書いたがこの式は一般の r で成り立ち、後で交代化作用素の理解を助ける。

以下交代テンソルを中心に扱う。

交代化作用素

$$\mathcal{A}_r : V_r \longrightarrow V_r$$

を

$$\mathcal{A}_r(f) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \epsilon(\sigma) \sigma(f)$$

によって定義する。

ここで $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$ であるから

$$\mathcal{A}_r(\omega^{i_1} \otimes \dots \otimes \omega^{i_r}) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \epsilon(\sigma) \omega^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes \omega^{i_{\sigma(r)}}$$

であることに注意する。

交代化作用素を基底を用いて具体的に計算してみよう。

$$f = \omega^1 \otimes \omega^2$$

のとき

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(f) &= \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} \epsilon(\sigma) \sigma(\omega^1 \otimes \omega^2) \\ &= \frac{\omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1}{2} \end{aligned}$$

同様に

$$f = \omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^3$$

のとき

$$\begin{aligned} & 3! \times \mathcal{A}_3(f) \\ &= \omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^3 + \omega^2 \otimes \omega^3 \otimes \omega^1 + \omega^3 \otimes \omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1 \otimes \omega^3 - \omega^3 \otimes \omega^2 \otimes \omega^1 - \omega^1 \otimes \omega^3 \otimes \omega^2 \end{aligned}$$

である .

ちなみにこれは後で定義することであるが

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = \omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1$$

であり

$$\begin{aligned} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 &= \sum_{\sigma \in S_3} \epsilon(\sigma) \omega^{\sigma(1)} \otimes \omega^{\sigma(2)} \otimes \omega^{\sigma(3)} \\ &= \omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^3 + \omega^2 \otimes \omega^3 \otimes \omega^1 + \omega^3 \otimes \omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1 \otimes \omega^3 - \omega^3 \otimes \omega^2 \otimes \omega^1 - \omega^1 \otimes \omega^3 \otimes \omega^2 \end{aligned}$$

のことである .

この交代化作用素 \mathcal{A}_r は任意の r 階テンソルを r 階交代テンソルに変換することを確認しよう .

任意の $f \in V_r$ および任意の置換 $\tau \in S_r$ に対して ,

$$\begin{aligned} & \tau(\mathcal{A}_r(f))(X_1, \dots, X_r) \\ &= \mathcal{A}_r(f)(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(r)}) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \epsilon(\sigma) f(X_{\sigma\tau(1)}, \dots, X_{\sigma\tau(r)}) \end{aligned}$$

ここで , σ が置換群 S_r の全体を動くとき $\sigma\tau$ も S_r 全体を動き

$$\epsilon(\sigma) = \epsilon(\tau)\epsilon(\sigma\tau)$$

であるから

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{r!} \epsilon(\tau) \sum_{\sigma \in S_r} \epsilon(\sigma\tau) f(X_{\sigma\tau(1)}, \dots, X_{\sigma\tau(r)}) \\ &= \epsilon(\tau) \mathcal{A}_r(f)(X_1, \dots, X_r) \\ \therefore \tau(\mathcal{A}_r(f)) &= \epsilon(\tau) \mathcal{A}_r(f) \end{aligned}$$

したがって , 交代化作用素 \mathcal{A}_r は任意の r 階のテンソルを r 階の交代テンソルに変換することが分かった .

次に f が交代テンソルのとき,

$$\mathcal{A}_r(f) = f$$

を確認しよう。これは定義から明らかで,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_r(f) &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \epsilon(\sigma) \sigma(f) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} f = f\end{aligned}$$

次に一歩進めて, 交代テンソルの作るベクトル空間を扱う。

r 階交代テンソル空間を

$$\Lambda^r(V^*) (= \mathcal{A}_r(V_r))$$

と表す。

ここで, 交代テンソルの外積を定義する。

定義

$$f \in \Lambda^r(V^*), g \in \Lambda^s(V^*)$$

に対して外積 $f \wedge g$, すなわち

$$\wedge : \Lambda^r(V^*) \times \Lambda^s(V^*) \longrightarrow \Lambda^{r+s}(V^*)$$

を

$$f \wedge g = \frac{(r+s)!}{r!s!} \mathcal{A}_{r+s}(f \otimes g)$$

で定義する。

定義にしたがって, V^* の基底 $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ を用いて, 外積を計算しよう。

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = \omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1$$

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$$

$$= \omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^3 + \omega^2 \otimes \omega^3 \otimes \omega^1 + \omega^3 \otimes \omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1 \otimes \omega^3 +$$

$$+\omega^1 \otimes \omega^3 \otimes \omega^2 - \omega^1 \otimes \omega^3 \otimes \omega^2$$

もっと一般に

$$\begin{aligned} & \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r \\ &= \sum_{\sigma \in S_r} \epsilon(\sigma) \omega^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \omega^{\sigma(r)} \end{aligned}$$

を読みとることが大切です．実際

$$\begin{aligned} \omega^1 \wedge \omega^2 &= \frac{2!}{1!1!} \mathcal{A}_2(\omega^1 \otimes \omega^2) \\ &= 2! \cdot \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} \epsilon(\sigma) \omega^{\sigma(1)} \otimes \omega^{\sigma(2)} \\ &= \omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1 \end{aligned}$$

次に $(\omega^1 \wedge \omega^2) \wedge (\omega^3 \wedge \omega^4)$ を計算する．

$$\begin{aligned} & (\omega^1 \wedge \omega^2) \wedge (\omega^3 \wedge \omega^4) \\ &= (\omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1) \wedge (\omega^3 \otimes \omega^4 - \omega^4 \otimes \omega^3) \\ &= \frac{4!}{2!2!} \frac{1}{4!} \sum_{\sigma \in S_4} \epsilon(\sigma) \sigma\{(\omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1) \otimes (\omega^3 \otimes \omega^4 - \omega^4 \otimes \omega^3)\} \end{aligned}$$

\sum の右側を展開したとき項数は $2!2!$ 個であり，係数が $+$ は置換群 S_4 における偶置換で $-$ は奇置換である．したがって， $\sigma \in S_4$ で和をとれば各項同じになるから

$$= \sum_{\sigma \in S_4} \epsilon(\sigma) \omega^{\sigma(1)} \otimes \omega^{\sigma(2)} \otimes \omega^{\sigma(3)} \otimes \omega^{\sigma(4)}$$

$$\begin{aligned} & \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r \\ &= \sum_{\sigma \in S_r} \epsilon(\sigma) \omega^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \omega^{\sigma(r)} \end{aligned}$$

を証明しよう．

$r = k$ のとき成り立つと仮定する． $r = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} & (\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k) \wedge \omega^{k+1} \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+1}} \omega^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \omega^{\sigma(k+1)} \\ & \omega^1 \wedge (\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^{k+1}) \end{aligned}$$

$$\sum_{\sigma \in S_{k+1}} \omega^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \omega^{\sigma(k+1)}$$

より

$$(\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k) \wedge \omega^{k+1} = \omega^1 \wedge (\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^{k+1})$$

したがって、数学的帰納法で

$$\begin{aligned} & \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r \\ &= \sum_{\sigma \in S_r} \epsilon(\sigma) \omega^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \omega^{\sigma(r)} \end{aligned}$$

が証明された。

以上が、外積の基底を用いた表示である。当然、基底を用いたら他の基底でも成り立つことを示さなければならない。そのため、外積の性質を調べるときは基底を用いない方法が用いられる。

次の命題は、外積についての基本的性質である。証明はベクトル空間の基底を用いていない点に注目すべきです。

命題

$$f, f_1, f_2 \in \wedge^r(V^*), g, g_1, g_2 \in \wedge^s(V^*), h \in \wedge^t(V^*)$$

について次の性質が成り立つ。

$$(1) (f_1 + f_2) \wedge g = f_1 \wedge g + f_2 \wedge g, f \wedge (g_1 + g_2) = f \wedge g_1 + f \wedge g_2$$

$$(2) f \wedge g = (-1)^{rs} g \wedge f$$

$$(3) (f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$$

証明

(1) はテンソルおよび交代化作用素とともに分配法則が成り立つから成り立つ。

(2) 任意の置換 $\sigma \in S_{r+s}$ に対して

$$\sigma(f \wedge g) = \epsilon(\sigma)(f \wedge g)$$

が成り立つ。したがって、 σ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & r+s \\ s+1 & \cdots & s+r & 1 & \cdots & s \end{pmatrix}$$

によって定めれば,

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{rs}$$

であり

$$\begin{aligned} & f \wedge g(X_1, \dots, X_{r+s}) \\ &= \epsilon(\sigma) \sigma(f \wedge g)(X_1, \dots, X_{r+s}) \\ &= (-1)^{rs} (f \wedge g)(X_{s+1}, \dots, X_{s+r}, X_1, \dots, X_s) \\ &= (-1)^{rs} \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau \in S_{r+s}} \epsilon(\tau) f(X_{\tau(s+1)}, \dots, X_{\tau(s+r)}) \cdot g(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(s)}) \\ &= (-1)^{rs} \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau \in S_{r+s}} \epsilon(\tau) g(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(s)}) \cdot f(X_{\tau(s+1)}, \dots, X_{\tau(s+r)}) \\ &= g \wedge f(X_1, \dots, X_{r+s}) \\ \therefore f \wedge g &= (-1)^{rs} g \wedge f \end{aligned}$$

(3) の証明は少し準備が必要. $1, \dots, r$ の置換群を $S_r, 1, \dots, r+s$ の置換群を S_{r+s} とする. $\sigma \in S_r$ のとき $\sigma \in S_{r+s}$ である. 実際

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & r+s \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(r) & r+1 & \cdots & r+s \end{pmatrix}$$

である. さらに, $\sigma \in S_r$ のとき σ は何であつても τ が S_{r+s} 全体を動くとき $\tau \circ \sigma$ は S_{r+s} 全体を動きさらに

$$\epsilon(\tau \circ \sigma) = \epsilon(\tau)\epsilon(\rho)$$

であることに注意する.

$$\begin{aligned} & (f \wedge g) \wedge h \\ &= \frac{(r+s+t)!}{(r+s)!t!} \mathcal{A}_{r+s+t}((f \wedge g) \otimes h) \\ &= \frac{(r+s+t)!}{(r+s)!t!} \mathcal{A}_{r+s+t}\left(\left(\frac{(r+s)!}{r!s!} \mathcal{A}_{r+s}(f \otimes g)\right) \otimes h\right) \\ &= \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!} \mathcal{A}_{r+s+t} \circ \mathcal{A}_{r+s}(f \otimes g \otimes h) \\ &= \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!} \mathcal{A}_{r+s+t}(f \otimes g \otimes h) \end{aligned}$$

同様に

$$f \wedge (g \wedge h) = \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!} \mathcal{A}_{r+s+t}(f \otimes g \otimes h)$$

であるから

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$$

が示された .

証明の中の最後の等式すなわち

$$\mathcal{A}_{r+s+t} \circ \mathcal{A}_{r+s} = \mathcal{A}_{r+s+t}$$

の説明が必要である .

その説明のために , クロネッカーの δ 記号 $\delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p}$ を次の式で定義する .

$$\delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} \stackrel{\text{定義}}{=} \begin{cases} 1 & i_1, \dots, i_p \text{ が互いに異なりかつ } j_1, \dots, j_p \text{ は } i_1, \dots, i_p \text{ の偶置換} \\ -1 & i_1, \dots, i_p \text{ が互いに異なりかつ } j_1, \dots, j_p \text{ は } i_1, \dots, i_p \text{ の奇置換} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

クロネッカーの δ 記号を用いると , 交代化作用素 \mathcal{A}_p がアインシュタインの規約を用いて ,

$$\mathcal{A}_p(f)(X_1, \dots, X_p) = \frac{1}{p!} \delta_{1 \dots p}^{i_1 \dots i_p} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_p}) \quad \dots (\#)$$

と表せる . なお , アインシュタインの規約に従った (#) は式も見やすく扱いやすい .

最後の等式を見直す .

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_{r+s+t} \circ \mathcal{A}_{r+s}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)(X_1, \dots, X_{r+s+t}) \\ &= \frac{1}{(r+s+t)!} \delta_{1 \dots r+s+t}^{i_1 \dots i_{r+s+t}} \mathcal{A}_{r+s}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)(X_{i_1}, \dots, X_{i_{r+s+t}}) \\ &= \frac{1}{(r+s+t)!} \frac{1}{(r+s)!} \delta_{1 \dots r+s+t}^{i_1 \dots i_{r+s+t}} \delta_{i_1 \dots i_{r+s}}^{j_1 \dots j_{r+s}} (\alpha \otimes \beta \otimes \gamma) \\ & \quad (X_{j_1}, \dots, X_{j_{r+s}}, X_{i_{r+s+1}}, \dots, X_{i_{r+s+t}}) \end{aligned}$$

ここで

$$\delta_{1 \dots r+s+t}^{i_1 \dots i_{r+s+t}} \delta_{i_1 \dots i_{r+s}}^{j_1 \dots j_{r+s}} = (r+s)! \delta_{1 \dots r+s+t}^{j_1 \dots j_{r+s} i_{r+s+1} \dots i_{r+s+t}}$$

であるから

$$= \mathcal{A}(f)(X_1, \dots, X_{r+s+t})$$

したがって証明が終了した。

以上は基底を用いない証明で，なかなかできるものではありません。

しかし，見方を変えれば (2) は

$$\begin{aligned} & (\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p) \wedge (\omega^{p+1} \wedge \dots \wedge \omega^{p+q}) \\ &= (-1)^{p+q} (\omega^{p+1} \wedge \dots \wedge \omega^{p+q}) \wedge (\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p) \end{aligned}$$

のことで，基底を用いれば明らかな事実です。(3) は基底を用いてすでに示しています。

次に，共変交代テンソル（外形式ということも多い）の意味を考えよう。

V を 2 次元ベクトル空間とし， $\{e_1, e_2\}$ を基底， V^* における $\{e_1, e_2\}$ の双対基底を $\{\omega^1, \omega^2\}$ とする。

すなわち $\omega^i(e_j) = \delta_j^i$ をみたく。

$$X = x^i e_i = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$Y = y^i e_i = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

のとき

$$\begin{aligned} & \omega^1 \wedge \omega^2(X, Y) \\ &= (\omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1)(X, Y) \\ &= \omega^1(X)\omega^2(Y) - \omega^2(X)\omega^1(Y) \\ &= x^1 y^2 - x^2 y^1 \\ &= \det \begin{pmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

一般の場合は次のようになる .

$\{e_i\}$ を V の基底 , その双対基底を $\{\omega^i\}$ とすると ,

$$\begin{aligned}\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} &= \sum_{\sigma \in S_r} \epsilon(\sigma) \omega^{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \omega^{i_{\sigma(r)}} \\ &= \delta_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_r}\end{aligned}$$

したがって , 行列式を用いて

$$\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r}(X_1, \dots, X_r) = \begin{vmatrix} \omega^{i_1}(X_1) & \cdots & \omega^{i_1}(X_r) \\ \cdots & & \cdots \\ \omega^{i_r}(X_1) & \cdots & \omega^{i_r}(X_r) \end{vmatrix}$$

となる . すなわち , ベクトル X_i を列ベクトルとした行列 $(X_1 \cdots X_r)$ の i_1, \dots, i_r 行よりなる行列式である . したがって ,

$$f = f_{i_1 \dots i_r} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r}$$

のそれぞれの項は小行列式で定義される . この見方は交代共変テンソルを理解するのに役に立つと思う .

外積空間 $\wedge^r(V^*)$ でよく用いる性質を整理しよう .

命題

V を n 次元のベクトル空間 , $\{e_i\}$ を基底 , $\{\omega^i\}$ をその双対基底とする .

このとき ,

$$\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} \quad \text{ただし } i_1 < \cdots < i_r$$

がベクトル空間 $\wedge^r(V^*)$ の基底である . すなわち

$$\dim \wedge^r(V^*) = {}_n C_r$$

である .

証明

$f \in \wedge^r(V^*)$ とする . f は r 階のテンソルであるから

$$f_{i_1 \dots i_r} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$$

で $f_{i_1 \dots i_r}$ で定めると

$$f = f_{i_1 \dots i_r} \omega^{i_1} \otimes \dots \otimes \omega^{i_r}$$

となる．さらに f は交代テンソルであるから f の係数 $f_{i_1 \dots i_r}$ は交代的である．したがって，

$$\begin{aligned} f &= f_{i_1 \dots i_r} \omega^{i_1} \otimes \dots \otimes \omega^{i_r} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_r} \end{aligned}$$

$\wedge^r(V^*)$ の要素は $\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_r}$ の 1 次結合で表せる．

次に 1 次独立であることを示そう．

$$f = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_r} = 0$$

とする．このとき，

$$f_{i_1 \dots i_r} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = 0$$

したがって，

$$\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_r}$$

は 1 次独立である．以上で

$$\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_r} \quad \text{ただし } i_1 < \dots < i_r$$

がベクトル空間 $\wedge^r(V^*)$ の基底であることが証明された．

命題

V を n 次元のベクトル空間， V の双対空間を V^* とする．

$\eta^1, \dots, \eta^r \in V^*$ が一次独立であるための必要十分条件は

$$\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^r \neq 0$$

である．

証明

まず， $\omega, \eta \in V^*$ のとき

$$\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega$$

であるから，

$$\omega \wedge \omega = 0$$

に注意する .

$\eta^1, \dots, \eta^r \in V^*$ が一次従属のとき

$$\eta^r = a_1 \eta^1 + \dots + a_{r-1} \eta^{r-1}$$

と表せる (必要なら r をかえればよい) から

$$\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^r = 0$$

逆に, $\eta^1, \dots, \eta^r \in V^*$ が一次独立のとき, これらのベクトルにさらに $n-r$ 個のベクトルを加えて, V^* の基底とできる. そこで, その基底の双対基底を $e_1, \dots, e_r, \dots, e_n$ とすれば

$$\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^r (e_1, \dots, e_r) = 1 \neq 0$$

したがって,

$$\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^r \neq 0$$

以上で証明が終了した .

2.2 面積要素

次に, 3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 における曲面 $\vec{f}(u, v)$ の面積要素を調べよう .

第1基本形式を

$$g = g_{ij} du \otimes dv$$

とする . すなわち, $T_P(\vec{f})$ の接ベクトル \vec{f}_u, \vec{f}_v をそれぞれ $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$ と表すとき,

$$g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = g_{11}, g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = g_{12}, g\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = g_{22}$$

である .

ここで, $T_P(\vec{f})$ の接ベクトル \vec{f}_u, \vec{f}_v をそれぞれ $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$ と見ることに注目しよう . これは曲面をユークリッド平面 (u, v) 上に計量テンソル $\{g_{ij}\}$ を定義したものと見ていることです . すなわち, 曲面 \vec{f} を表す式は関係ない, 言い方を変えれば曲面の形は関係ないということです . すなわち, 計量

テンソル $\{g_{ij}\}$ だけで幾何学をすることを，曲面が本来持っている性質に注目した幾何学で内在幾何 (Intrinsic geometry) とよばれ，これがリーマン幾何学です．詳しくは第 1 基本形式をご覧ください．

さて話を戻しましょう．

$$\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du \wedge dv$$

は

$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x}, \vec{y}$ の定める平行四辺形の面積

を表すことを示そう．

$T_P(\vec{f})$ の任意のベクトル

$$\vec{x} = a \frac{\partial}{\partial u} + b \frac{\partial}{\partial v} = a \vec{f}_u + b \vec{f}_v,$$

$$\vec{y} = c \frac{\partial}{\partial u} + d \frac{\partial}{\partial v} = c \vec{f}_u + d \vec{f}_v$$

に対して， $\vec{x} \times \vec{y}$ の大きさすなわち \vec{x}, \vec{y} の決める平行四辺形の面積は，

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= \left(a \frac{\partial}{\partial u} + b \frac{\partial}{\partial v} \right) \times \left(c \frac{\partial}{\partial u} + d \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= (ad - bc) \frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

ここで

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v} \right|^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$

(\because ラグランジュの恒等式より)

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

であり

$$ad - bc = du(\vec{x}) \cdot dv(\vec{y}) - dv(\vec{x}) \cdot du(\vec{y}) = \begin{vmatrix} du(\vec{x}) & du(\vec{y}) \\ dv(\vec{x}) & dv(\vec{y}) \end{vmatrix}$$

$$= du \wedge dv(\vec{x}, \vec{y})$$

したがって，

$$\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du \wedge dv(\vec{x}, \vec{y})$$

は \vec{x}, \vec{y} の定める平行四辺形の面積である．

$$d\sigma = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du \wedge dv$$

と表し， $d\sigma$ を面積要素と呼び，曲面上の積分の時によく用いられる．

同様に, n 次元空間 $(\mathbb{R}^n; x^1, \dots, x^n)$ においても

$$G = \det(g_{ij}) \text{ ただし } g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

とおけば, X_1, \dots, X_n の決める立体

$$\{t_1 X_1 + \dots + t_n X_n \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$$

の体積が

$$\sqrt{G} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n (X_1, \dots, X_n)$$

となる.

$$d\sigma = \sqrt{G} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

とおき, $d\sigma$ を \mathbb{R}^n の体積要素 (Volume element) とよぶ. この体積要素が曲面や多様体上の積分で用いられる.

面積要素が \vec{x}, \vec{y} に対して, そのベクトルが定める平行四辺形の面積を対応させる性質より, 座標のとり方によらないことがわかるが, 座標の取り方によらないことを計算で確認しておこう.

$\vec{f}(u, v)$ および $\vec{f}(x, y)$ が曲面 \vec{f} の 2 つの媒介変数表示とする.

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

したがって,

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$= J \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} J^T$$

$$= J \begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{pmatrix} J^T$$

ここで, \cdot は内積であり

$$g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = g_{11}, g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = g_{12}, g\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = g_{22}$$

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g'_{11}, g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = g'_{12}, g\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = g'_{22}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

J^T は J の転置行列である．さらに曲面 f は向きつけ可能の場合を考える

J の行列式 $|J|$ は正とする．

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = |J|^2(g'_{11}g'_{22} - g'_{12}g'_{12})$$

$$\therefore \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = |J|\sqrt{g'_{11}g'_{22} - g'_{12}g'_{12}}$$

一方

$$dx \wedge dy = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right)$$

$$= |J| du \wedge dv$$

$$\therefore \sqrt{g'_{11}g'_{22} - g'_{12}g'_{12}} dx \wedge dy$$

$$= \sqrt{g'_{11}g'_{22} - g'_{12}g'_{12}} |J| du \wedge dv$$

$$= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du \wedge dv$$

以上で, 面積要素が曲面の媒介変数の取り方によらないことが分かった．

少し寄り道をして, 重積分を復習しよう．

通常重積分

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

の $dx dy$ は $dx \wedge dy$ の意味で実際は

$$\iint_D f(x, y) dx \wedge dy$$

書くべきものである．

このように表せば変数変換も機械的に処理できる .

実際

$$x = x(u, v), y = y(u, v)$$

と変数変換するとき

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

したがって .

$$dx \wedge dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du \wedge dv$$

関数行列式は通常 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ と表すので

$$= \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv$$

この変数変換

$$(u, v) \mapsto (x, y)$$

で領域が

$$S \mapsto D$$

のとき

$$\iint_D f(x, y) dx \wedge dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv$$

と機械的な変形で得られる . 実際に高校で学ぶ置換積分は線分の変化の比などは考えないこのような学び方であった .

例

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy \quad D : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x, 0 \leq y$$

を計算しよう .

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

と変数変換し

$$S : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

によって S を定義すれば

$S \mapsto D$

したがって

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy &= \iint_S e^{r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 e^{r^2} r dr = \pi(e-1) \end{aligned}$$

積分における Green の公式 , Gauss の公式 , Stokes の公式は

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

のことである . この式は驚くに必要はない .

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

で右辺を

$$\int_{\partial[a,b]} f(x)$$

と書けば

$$\int_{[a,b]} df = \int_{\partial[a,b]} f$$

実際 , Green の公式 , Gauss の公式 , Stokes の公式の証明も 1 変数の性

質を利用して行っている .

Green の公式は

$$\int_{\partial D} f(x, y) dx + g(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Stokes の公式, Gauss の公式は R^3 で考える公式で Stokes の公式は

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz \\ = \iint_D \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Gauss の公式は

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f(x, y, z) dy \wedge dz + g(x, y, z) dz \wedge dx + h(x, y, z) dx \wedge dy \\ = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

である . いずれの場合も左辺の被積分の部分を外微分すれば右辺になる .

(交代テンソル積の項目終わり)