

## 5. 法曲率のオイラー公式とデュパンの標形

前の章で曲率線座標を扱いました。ここでは、曲率線座標を用いて曲面の曲がる具合を調べます。

ここで、言葉の意味の復習をします。曲面  $f(u, v)$  とは

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} f_1(u, v) \\ f_2(u, v) \\ f_3(u, v) \end{pmatrix}$$

と3つの関数  $f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)$  で決まるベクトル値関数ですので、 $\vec{f}(u, v)$  のようにベクトルを用いるか、ここで書いたように  $f(u, v)$  と  $f$  を太字で表すべきですが、全編を通して、 $f$  と通常関数の表示をしています。

$f(u, v)$  は  $\mathbb{R}^3$  の曲面を表し、この表し方を曲面の媒介変数表示といい、 $u, v$  を座標変数といいます。ガウスは曲面をこの媒介変数表示で表し研究しました。なおモンジュ (Monge. Gaspard) は曲面を  $z = f(x, y)$  の形で研究しました。そのため  $z = f(x, y)$  の表し方をモンジュ形式といいます。

曲面  $f(u, v)$  が与えられれば、第1基本形式、第2基本形式

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

が決まります。ここで、 $E, F, G$  を第1基本形式の係数または第1基本量といい、 $L, M, N$  を第2基本形式の係数または第2基本量といいます。曲面が決まれば  $E, F, G, L, M, N$  が決まり、逆に後で学ぶ曲面の基本定理より  $E, F, G, L, M, N$  が決まれば曲面が唯一に決まりますから、曲面は実際は  $u, v$  平面の各点に6つの関数  $E(u, v), F(u, v), G(u, v), L(u, v), M(u, v), N(u, v)$  を定義したのもです。なお、第1基本形式だけで曲面の幾何学をやるということは  $(u, v)$  の各点に  $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$  を定義しただけで議論を進めていこうということ

です .

曲面  $f(u, v)$  が与えられたとき ,  $v_0$  を固定すれば変数  $u$  を媒介変数とする曲線  $f(u, v_0)$  が定まります . この曲線を  $u$  座標曲線または  $u$  線といいます .  $v$  座標曲線 ( $v$  線) も同様に定義します .  $u$  線及び  $v$  線を曲面  $f(u, v)$  の座標曲線といいます . さらに , すべての  $u$  曲線 ,  $v$  曲線からなる曲線網を座標曲線網といいます . もちろん座標曲線網のすべてを表すことはできません . 塗りつぶされてしまいます . パソコンで曲面を書くと , 飛び飛びの座標曲線が記入されています . すなわち , 曲面  $f(u, v)$  とは ,  $u, v$  平面上 ( 2 次元ユークリッド平面 ) のゴムでできた領域を , 伸び縮み湾曲させて 3 次元ユークリッド空間においたものです . 第 1 基本量 , 第 2 基本量  $E, F, G, L, M, N$  はその伸び縮み , 湾曲を定める量と考えればよい . 座標曲線は , 元のゴムの領域に ,  $u$  軸に平行な直線 ,  $v$  軸に平行な直線が引いてあるということです .

本題に入りましょう . なお , ここでの議論は後で学ぶ測地曲率の Liouville の公式を得るための理解を助けます .

曲面  $f(u, v)$  で座標変数  $u, v$  が曲率線座標であるとは , 座標曲線  $u$  線 ,  $v$  線の接ベクトルが常に主方向を向いていることです . 点  $P$  が臍点でなければ , 点  $P$  の近傍で曲率線座標が存在することが知られています .

以下 , 曲率線座標のもとで , 曲面上の点  $P$  における曲面の曲がり具合を調べる .  $P$  の周りの座標  $(u, v)$  が曲率線座標のとき ,  $F = 0, M = 0$  であるから

$$I = Edu^2 + Gdv^2$$

$$II = Ldu^2 + Ndv^2$$

したがって , 点  $P$  における法曲率は

$$k_n(du, dv) = \frac{Ldu^2 + Ndv^2}{Edu^2 + Gdv^2}$$

主方向は  $f_u, f_v$  ベクトルであるから , 主曲率 ( 法曲率の最大値と最小値 ) は

$$k_n(1, 0) = \frac{L}{E}, k_n(0, 1) = \frac{N}{G}$$

ここで,  
 $k_1 = \frac{L}{E}, k_2 = \frac{N}{G}$   
 とおく.

$f_u$  ベクトルと同じ向き of 単位ベクトルを  $e_1, f_v$  ベクトルと同じ向き of 単位ベクトルを  $e_2$  とし, 点 P におけるこの曲面の単位接ベクトル  $\alpha$  とベクトル  $e_1$  とのなす角を  $\theta$  とする.

$$e_1 = \frac{f_u}{\sqrt{E}}, e_2 = \frac{f_v}{\sqrt{G}}$$

であるから, 基底を  $f_u, f_v$  とすれば

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \\ &= \frac{\cos \theta f_u}{\sqrt{E}} + \frac{\sin \theta f_v}{\sqrt{G}} = \left( \frac{\cos \theta}{\sqrt{E}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{G}} \right) \end{aligned}$$

$\alpha$  と  $e_1$  ベクトルとのなす角が  $\theta$  のとき,  $\alpha$  方向の法曲率を  $k_n(\alpha) = k_n(\theta)$

と表すと,

$$\begin{aligned} k_n(\alpha) &= k_n(\theta) = k_n\left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{E}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{G}}\right) \\ &= \frac{L}{E} \cos^2 \theta + \frac{N}{G} \sin^2 \theta \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta \quad \dots (1) \end{aligned}$$

(1) を法曲率のオイラー公式といいます.

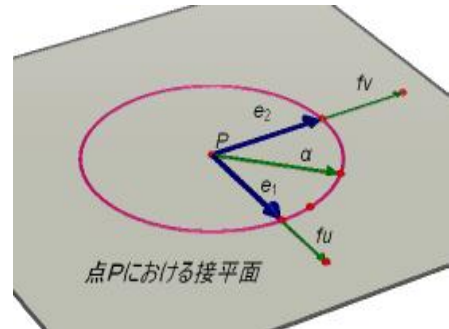
$k_1 < k_2$  のとき

$$k_n(\theta) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta = k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 \theta$$

と変形すれば,

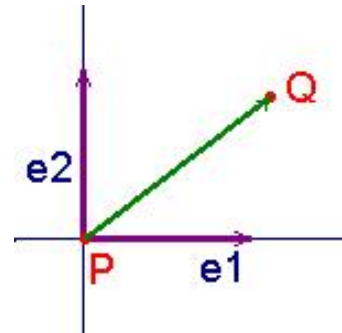
$$k_1 \leq k_n \leq k_2$$

と当たり前の式が得られる. 等号が成り立つのは  $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$  のときです.



等高線の考えを利用して，曲面の曲がり方を図示します．

等高線が離れていれば傾斜は緩やかで，等高線が密だと傾斜は急です．曲面で曲がり方が急ということは曲率が大きい，すなわち．その逆数である曲率半径が小さいことを利用します．



曲面上の点  $P$  の接平面上で， $e_1$  ベクトルと正の向きにはかった角  $\theta$  の  $P$  からでる半直線上に点  $Q$  を

$$PQ = \frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$$

で定義する．点  $Q$  の軌跡を曲面  $f(u, v)$  の点  $P$  におけるデュパンの標形といます．

この軌跡を求めよう．極方程式

$$r = \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} = \frac{1}{\sqrt{|k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta|}}$$

と表された曲線です．直交座標に直すと

$$x = r \cos \theta = \frac{\cos \theta}{\sqrt{|k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta|}}$$

$$y = r \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{|k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta|}}$$

したがって，デュパンの標系の方程式は

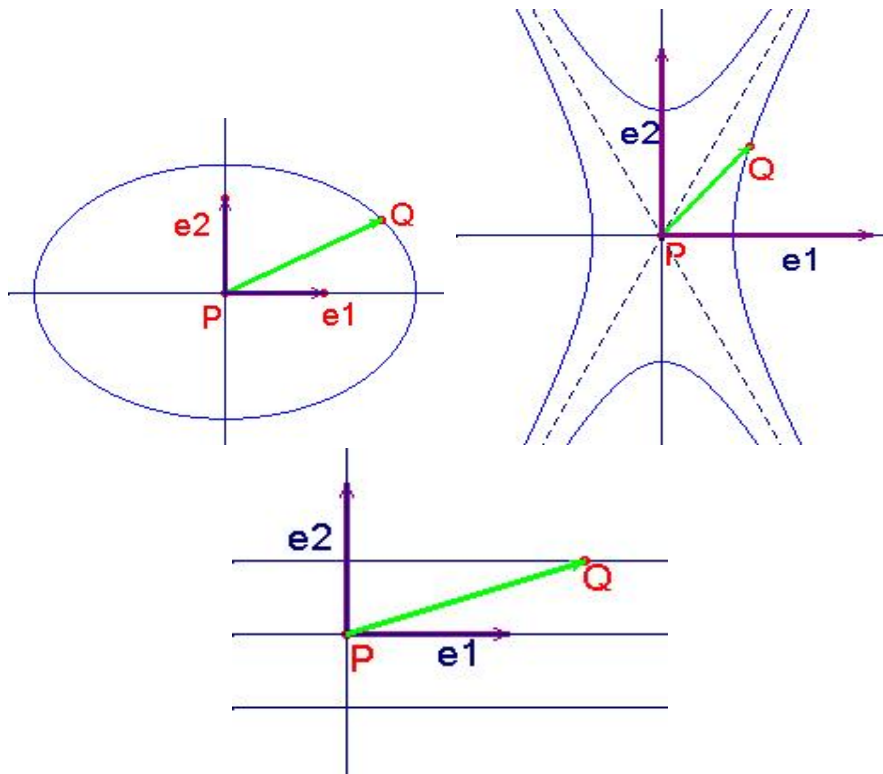
$$k_1 x^2 + k_2 y^2 = \frac{k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta}{|k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta|} = \pm 1$$

となります．図形は  $k_1, k_2$  が同符号のとき楕円，異符号のとき双曲線，片方が 0 のとき平行な 2 直線となります．この図形が，点  $P$  における曲面の曲がり方の 1 つの表示方法です．

$k_1 k_2$  は全曲率で

$$k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

が成り立ちます．さらに  $EG - F^2 > 0$  ですから，グラフの形は  $LN - M^2$  の符号で決定します．



曲面上の各点をデュパンの標形の形すなわち  $LN - M^2$  の符号によって次のように名づけます．

点  $P$  において  $LN - M^2 > 0$  が成り立つとき点  $P$  を楕円点という．

点  $P$  において  $LN - M^2 < 0$  が成り立つとき点  $P$  を双曲点という．

点  $P$  において  $LN - M^2 = 0$  が成り立つとき点  $P$  を放物点という．

デュパンの標形は，曲面の 2 次の近似式を作ると理解しやすい．

$f(u, v)$  を曲率線座標とする．すなわち，第 1 基本量，第 2 基本量のうち，

$$F = 0, M = 0$$

である．さらに曲面上  $f(u, v)$  上の点  $P$  で

$$E = f_u \cdot f_u = 1, G = f_v \cdot f_v = 1$$

と仮定する．このとき，点  $P$  における主曲率が  $k_1, k_2$  のとき，

$$L = k_1 E = k_1, N = k_2 G = k_2$$

である．点  $P$  における媒介変数  $u, v$  の値を

$$u = 0, v = 0$$

として， $f(u, v)$  の点  $P$  における Taylor 展開は

$$f(u, v) = f(0, 0) + f_u(0, 0)u + f_v(0, 0)v + \frac{f_{uu}(0, 0)u^2 + 2f_{uv}(0, 0)uv + f_{vv}(0, 0)v^2}{2} + o(u^2 + v^2)$$

点  $P$  における単位法線ベクトルを  $n$  とおくと

$$f_{uu} \cdot n = L = k_1, f_{uv} \cdot n = M = 0, f_{vv} \cdot n = k_2$$

であるから，

$$f(u, v) = f(0, 0) + (u + o(\sqrt{u^2 + v^2}))f_u + (v + o(\sqrt{u^2 + v^2}))f_v + \frac{k_1u^2 + k_2v^2 + o(u^2 + v^2)}{2}$$

したがって，点  $P$  を原点とする座標軸を基本ベクトルが  $f_u, f_v, n$  であるようにとり，その座標軸における座標を  $(x, y, z)$  すると，曲面  $f(u, v)$  は

$$x = u + o(\sqrt{u^2 + v^2})$$

$$y = v + o(\sqrt{u^2 + v^2})$$

$$z = \frac{k_1u^2 + k_2v^2 + o(u^2 + v^2)}{2}$$

したがって，曲面  $f$  の近似式は

$$z = \frac{k_1x^2 + k_2y^2}{2}$$

である．

この近似式を  $z = \pm \frac{1}{2}$  で切った切り口の図形は

$$k_1x^2 + k_2y^2 = \pm 1$$

である．この式がデュパンの標形である．

### 例 1

#### トーラス面

$$f(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u)$$

ついて調べよう .

$$f_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$$

$$f_v = (-(2 + \cos u) \sin v, (2 + \cos u) \cos v, 0)$$

$$n = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

$$f_{uu} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

$$f_{uv} = (\sin u \sin v, -\sin u \cos v, 0)$$

$$f_{vv} = (-(2 + \cos u) \cos v, -(2 + \cos u) \sin v, 0)$$

まず ,  $F = 0, M = 0$  であるから , この座標は曲率線座標である .

次に ,  $L = 1, M = 0, N = (2 + \cos u) \cos u$  より

$$LN - M^2 = (2 + \cos u) \cos u$$

したがって ,

$$\frac{-\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$$

のとき楕円点

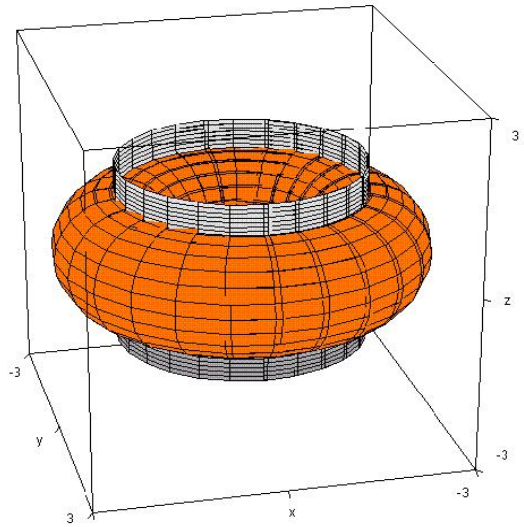
$$u = \pm \frac{\pi}{2}$$

のとき放物点

$$\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$$

のとき双曲点である .

図の円柱の底面は原点を中心とする半径 2 の円です . 円柱の外側が楕円点 , 円柱上が放物点円柱の内側が双曲点となります .



### 例 2

回転面，すなわち

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, g(u))$$

の座標変数は曲率線座標である。

実際

$$f_u = (\cos v, \sin v, g'(u))$$

$$f_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

$$f_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$$

より

$$F = f_u \cdot f_v = 0$$

また  $f_u$  と  $f_{uv}$  が平行より

$$f_{uv} \cdot (f_u \times f_v) = 0$$

したがって  $M = 0$  .

例 3

双曲放物面

$$f(u, v) = (u + v, u - v, uv)$$

の曲率線を求めよう。

$$f_u = (1, 1, v)$$

$$f_v = (1, -1, u)$$

$$f_{uu} = (0, 0, 0)$$

$$f_{uv} = (0, 0, 1)$$

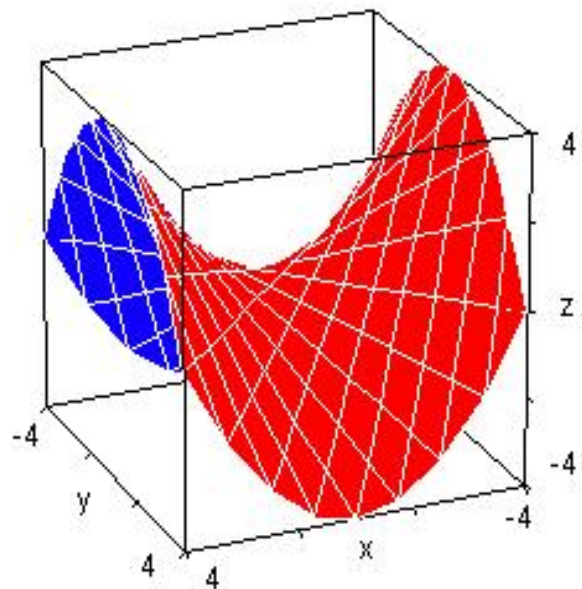
$$f_{vv} = (0, 0, 0)$$

曲率線の微分方程式は

$$(EM - FL)du^2 - 2(GL - EN)dudv + (FN - GM)dv^2 = 0$$

であり， $L = 0, N = 0$  を代入すると

$$-MEdu^2 + MGdv^2 = 0$$





したがって

$$-Edu^2 + Gdv^2 = 0$$

となり,  $M$  は計算する必要はありません.

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{E}{G}$$

ここで,

$$E = 2 + v^2, G = 2 + u^2$$

より

$$\frac{dv}{du} = \pm \sqrt{\frac{v^2 + 2}{u^2 + 2}}$$
$$\therefore \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2}} = \frac{dv}{\sqrt{v^2 + 2}}$$

ここで,

$$\log(u + \sqrt{u^2 + 2})' = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 2}}$$

より

$$\log(u + \sqrt{u^2 + 2}) = \log(v + \sqrt{v^2 + 2}) + C$$
$$\therefore \frac{u + \sqrt{u^2 + 2}}{v + \sqrt{v^2 + 2}} = C$$

$$\text{同様に } (u + \sqrt{u^2 + 2})(v + \sqrt{v^2 + 2}) = C$$

曲率線のこの式を見て驚くかもしれません. 図より,  $u = 0, v = 0$  を通る曲率線は  $u = \pm v$  のはずですが. しかし心配する必要がなく, 上の式で,  $u = -v$  は

$$(u + \sqrt{u^2 + 2})(v + \sqrt{v^2 + 2}) = C$$

の  $C = 2$  中に含まれています．実際  
 $(u + \sqrt{u^2 + 2})(-u + \sqrt{u^2 + 2}) - 2 =$   
0

が成り立ちます．

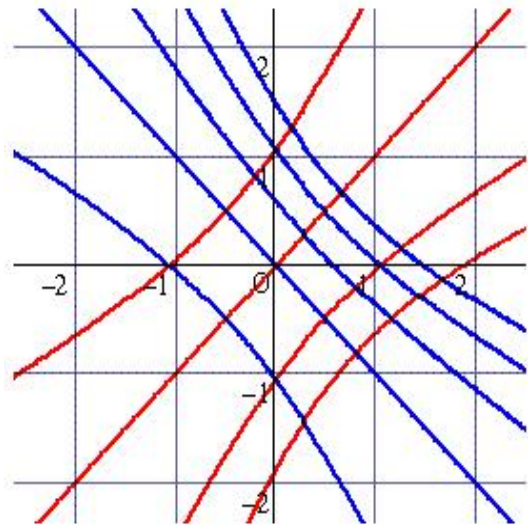
右の図は  $u, v$  の関係式をグラフに表  
したものです．

青線は

(積) = 1, 2, 3, 4, 5 (右上に  
向かって)

赤線は

(商) =  $\frac{1}{2}$ , 1, 2, 3 (右下に向かっ  
て) です．



(法曲率のオイラー公式との標形の項目終わり)