

曲率

1. 曲率テンソル

ここでは曲率テンソルを学びます．すでに接続すなわち多様体上の偏微分を学びました．多様体の上でベクトルに対して2度偏微分を行うと，交換可能ではありません，すなわち $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ で $\nabla_X \nabla_Y Z$ と $\nabla_Y \nabla_X Z$ は異なります．したがって，その差がきちんと計算できないかぎり，多様体上の微分ができることにはなりません．ガウスはこの差が曲面の曲がり方すなわちガウス曲率で表せることが分かりました．それが通常「ガウスの驚異の定理」といわれる内容です．ガウスは2次元曲面を研究しました．曲面論の方を見てもらえば分かりますが，2次元でもその差は複雑です．その後の数学者は，高次元におけるこの問題をテンソルの概念を用いて解決しました．

リーマン幾何の土台としての最後の難所です．ゆっくり読みすすめてください．

まず， $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ に対して

$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

を

$$T(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$$

によって定義すると T はテンソル場ではありません．実際

$$T(fX, Y, Z) = fT(X, Y, Z) - Y(f)\nabla_X Z$$

となります．そこで修正項を付け加えた次の定義をします．

定義

(M, g) をリーマン多様体， ∇ をリーマン接続とする．任意の $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ に対して $R(\cdot, \cdot), R$ を次のように定義する．ただし， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は g より決まる内積である．

$$R(\cdot, \cdot) : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

を

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

によって定義し,

$$R(X, Y, Z, W) : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

を

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$$

によって定義する.

ここで定義した $R(\cdot, \cdot), R$ をともに曲率テンソル場という.

次の性質が成り立つことが, 上記の作用素がテンソル場であることを示している.

命題

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M), \forall f \in C^\infty(M)$ に対して次が成り立つ.

$$(1) R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$$

$$(2) R(fX, Y)Z = fR(X, Y)Z, R(X, fY)Z = fR(X, Y)Z$$

$$(3) R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z$$

証明

(1) は $[X, Y] = -[Y, X]$ より明らか.

(2) 交換子積 $[X, Y]$ について

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$$

が成り立つことに注意する.

$$\nabla_{fX} \nabla_Y Z = f \nabla_X \nabla_Y Z$$

$$\nabla_Y \nabla_{fX} Z = \nabla_Y (f \nabla_X Z) = Y(f) \nabla_X Z + f \nabla_Y \nabla_X Z$$

$$\nabla_{[fX, Y]} Z = f \nabla_{[X, Y]} Z - Y(f) \nabla_X Z$$

より (2) の前半の式が成り立つ. 後半は (1) より成り立つことが分かる.

(3) は少し計算が面倒だが単純な計算である.

$$\nabla_X \nabla_Y (fZ) = \nabla_X (Y(f)Z) + \nabla_X (f \nabla_Y Z)$$

$$\begin{aligned}
&= X(Y(f))Z + Y(f)\nabla_X Z + X(f)\nabla_Y Z + f\nabla_X \nabla_Y Z \\
\nabla_Y \nabla_X (fZ) &= Y(X(f))Z + X(f)\nabla_Y Z + Y(f)\nabla_X Z + f\nabla_Y \nabla_X Z \\
\nabla_{[X,Y]} fZ &= ([X,Y]f)Z + f\nabla_{[X,Y]} Z
\end{aligned}$$

ここで

$$[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

であるから成り立つ。

$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ より X, Y を交換したときの関係はわかった。
 Z を含めた X, Y, Z の関係は次の通りである。次の恒等式は Bianchi の恒等式と呼ばれている。

命題

(M, g) をリーマン多様体, ∇ をリーマン接続とする。任意の $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ に対して次の等式が成り立つ。

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

証明

接続が対称である, すなわち

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

が成り立つことを用いる (これはリーマン接続の条件の1つ)。

$$\begin{aligned}
&R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\
&+ \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X \\
&+ \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= \nabla_X (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - \nabla_{[Y,Z]} X \\
&+ \nabla_Y (\nabla_Z X - \nabla_X Z) - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&+ \nabla_Z (\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[X,Y]} Z \\
&= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0
\end{aligned}$$

最後の等号は, 交換子積の Jacobi 恒等式である。

次に

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$$

で定義された曲率 R の性質を調べよう．なお

$$R(\cdot, \cdot) : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

この2つのテンソル場はユークリッド空間上表現が異なるだけで同一視するテンソル場である．実際，後で許容座標系による成分を計算するが添字の上げ下げする規則に従う．

命題

(M, g) をリーマン多様体， ∇ をリーマン接続とする．リーマンテンソル場

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

は任意の $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ に対して次の等式が成り立つ．

$$(1) \quad R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$$

$$(2) \quad R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$$

$$(3) \quad R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$$

$$(4) \quad R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$$

証明

(1) は定義より，(3) は $R(\cdot, \cdot)$ の Bianchi の恒等式より明らかである．

(2)

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle$$

$$= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle$$

ここで

$$\langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle = X \langle \nabla_Y Z, W \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W \rangle$$

$$= XY \langle Z, W \rangle - X \langle Z, \nabla_Y W \rangle - Y \langle Z, \nabla_X W \rangle + \langle$$

$$Z, \nabla_Y \nabla_X W \rangle$$

同様に

$$\langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle = YX \langle Z, W \rangle - Y \langle Z, \nabla_X W \rangle - X \langle Z, \nabla_Y W \rangle + \langle Z, \nabla_X \nabla_Y W \rangle$$

また,

$$\langle \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle = [X, Y] \langle Z, W \rangle - \langle Z, \nabla_{[X,Y]} W \rangle$$

これらの式より

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = - \langle Z, R(X, Y)W \rangle$$

を得る.

$$\therefore R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$$

(4)

(3) と同様の式を他に3つつくる. すなわち

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$$

$$R(Y, Z, W, X) + R(Z, W, Y, X) + R(W, Y, Z, X) = 0$$

$$R(X, Z, W, Y) + R(Z, W, X, Y) + R(W, X, Z, Y) = 0$$

$$R(X, Y, W, Z) + R(Y, W, X, Z) + R(W, X, Y, Z) = 0$$

辺々加え (1),(2) を用いると

$$R(X, Z, W, Y) + R(Y, W, X, Z) = 0$$

を得る.

$$\therefore R(X, Z, W, Y) = R(W, Y, X, Z)$$

次に, 許容座標系 $(U; x^i)$ を用いて曲率テンソル場の成分を求めよう.

テンソル場 $R(\cdot, \cdot)$ は (1, 3) 型テンソル場である.

$$R = R_{ijk}{}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$$

とおけば,

$$R_{ijk}{}^l = R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, dx^l\right)$$

$$\begin{aligned} & \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\Gamma_{kj}^t \frac{\partial}{\partial x^t} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{kj}^t}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^t} + \Gamma_{kj}^t \Gamma_{ti}^s \frac{\partial}{\partial x^s}$$

添字をそろえて

$$= \left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^t}{\partial x^i} + \Gamma_{kj}^s \Gamma_{si}^t \right) \frac{\partial}{\partial x^t}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0 \text{ であるから}$$

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^t}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^t}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^s \Gamma_{si}^t - \Gamma_{ki}^s \Gamma_{sj}^t \right) \frac{\partial}{\partial x^t}$$

したがって,

$$R_{ijk}{}^l = \frac{\partial \Gamma_{kj}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^s \Gamma_{si}^l - \Gamma_{ki}^s \Gamma_{sj}^l$$

であり,

$$R = R_{ijk}{}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$$

となる.

$X, Y \in \mathcal{X}(M)$ を固定すれば $R(X, Y)$ は $(1, 1)$ 型のテンソル場であり,

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

のとき,

$$R(X, Y) = X^i Y^j R_{ijk}{}^l dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$$

となる.

さらに $(0, 4)$ 型曲率テンソル場 R は

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right)$$

$$= \langle R_{ijk}{}^t \frac{\partial}{\partial x^t}, \frac{\partial}{\partial x^l} \rangle$$

$$= R_{ijk}{}^t g_{tl}$$

$$\therefore R_{ijkl} = R_{ijk}{}^t g_{tl}$$

これは, ユークリッド空間 (内積が付与されたベクトル空間) では内積により反変ベクトルと共変ベクトルが同一視され, その同一視をより $(1, 3)$ 型の曲率テンソル場と $(0, 4)$ 型の曲率テンソル場は同じテンソル場である.

なお，ここで求めた $R_{ijk}{}^t, R_{ijkl}$ は曲面のガウス曲率を求めるときに出てきた式と同じ式であることが後で用いられる．

2. 断面曲率

曲面論ではガウス曲率を考えました．それに対応するものとして，高次元の多様体では断面曲率を考えます．

(M, g) を m 次元リーマン多様体とします． M 上の任意の点 P における任意の接ベクトル $x, y \in T_P(M)$ に対して， $|x \times y|$ を

$$|x \times y|^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2$$

によって定義する．すなわち， x, y が一次独立のとき $|x \times y|$ は x, y の決める平行四辺形の面積である．

実際

$$|x|^2 |y|^2 \sin^2 \theta = |x|^2 |y|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= |x|^2 |y|^2 - (|x||y| \cos \theta)^2$$

$$= \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2$$

x, y が一次独立のとき x, y の決める $T_P(M)$ の 2 次元部分空間を $\{x, y\}$ で表し M の P における 2 次元断面という．

x, y が一次独立のとき，

$$K(x, y) = -\frac{R(x, y, x, y)}{|x \times y|^2}$$

で $K(x, y)$ を定義し， $K(x, y)$ が $\{x, y\}$ の一次独立な 2 つのベクトルのとり方によらないことを示す．ちなみに後で定義をするがこの値が 2 次元断面 $\{x, y\}$ の決める断面曲率である．

$\forall u, v \in \{x, y\}$ は一次独立とする．

$$u = ax + by, v = cx + dy$$

とおくと，

$$|u \times v|^2 = |(ax + by) \times (cx + dy)|^2 = (ad - bc)^2 |x \times y|^2$$

一方, $R(u, v, u, v)$ は前の2項, 後ろの2項に関して交代であるあるから

$$\begin{aligned} R(u, v, u, v) &= R(ax + by, cx + dy, ax + by, cx + dy) \\ &= (ad - bc)^2 R(x, y, x, y) \end{aligned}$$

したがって,

$$K(x, y) = -\frac{R(x, y, x, y)}{|x \times y|^2}$$

によって K を定義すると, $K(x, y)$ の値は1次独立な $\{x, y\}$ に属する2つのベクトルのとり方によらないことが分かる.

定義

M をリーマン多様体とする. $P \in M$ で $T_P(M)$ の1次独立な任意のベクトル x, y に対して

$$K(x, y) = -\frac{R(x, y, x, y)}{|x \times y|^2} \dots (*)$$

によって $K(x, y)$ を定義する. ただし,

$$|x \times y| = \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2}.$$

$K(x, y)$ を2次元断面 $\{x, y\}$ の決める断面曲率という.

さて, 断面曲率の定義式である (*) の意味が分かるだろうか. この理解にはユークリッド空間 \mathbb{R}^3 における曲面論の理解が必要です. ここで簡単にまとめておきます. 通常ベクトル表記は, 太文字にしたり, 矢印を用いるが本稿は全体を通して煩雑のためそのようにはしていない. ここだけ, ベクトルは太文字 (ボールド体) を用いる.

モンジュは \mathbb{R}^3 における曲面を

$$z = f(x, y)$$

と表して研究しましたが, ガウスは

$$\mathbf{f}(u, v) = (f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v))$$

として研究しました. 一般には曲面の研究はガウスの方法が用いられます.

曲面を

$$\mathbf{f} : U(\subset \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \mathbf{f}(u, v) = (f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v))$$

と表す. ここでは, 微分可能性の面倒さを避けるために $f^i \in C^\infty$ とする.

u, v に関する偏微分は

$$\left(\frac{\partial f^1}{\partial u}, \frac{\partial f^2}{\partial u}, \frac{\partial f^3}{\partial u} \right) = \mathbf{f}_u, \left(\frac{\partial^2 f^1}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 f^2}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 f^3}{\partial u \partial v} \right) = \mathbf{f}_{uv}$$

等と表す.

$\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_v$ は曲面 \mathbf{f} の接平面の基底になり, 接ベクトルは

$$af_u + bf_v$$

と表せる .

曲面 f の接ベクトルは

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)$$

の $(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0, 0)$ のときの極限と考え

$$df = f_u du + f_v dv$$

と表す . これは微分幾何の習慣です . du, dv がなじめなければ du, dv は a, b に置き換えればよい .

\mathbb{R}^3 で考えた , ベクトル df の大きさの 2 乗

$$|df|^2 = df \cdot df$$

$$= (f_u du + f_v dv) \cdot (f_u du + f_v dv)$$

$$= f_u \cdot f_u du^2 + 2f_u \cdot f_v dudv + f_v \cdot f_v dv^2$$

$$E = f_u \cdot f_u, F = f_u \cdot f_v, G = f_v \cdot f_v \text{ とおけば}$$

$$= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

とおき , I を第 1 基本形式 , E, F, G を第 1 基本量という .

第 1 基本形式を与えるとは , 第 1 基本量を与えることで , 各点でベクトルの長さを与えることであります . さらに

$$4v \cdot w = |v + w|^2 - |v - w|^2$$

であるから , 内積が定義されることになります .

次に , 曲面 f には第 2 基本形式が定義されます . それは , 曲面が接平面から離れる度合いです .

$f(u + \Delta u, v + \Delta v)$ の 2 次の近似式は

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) = f(u, v) + f_u(u, v)\Delta u + f_v(u, v)\Delta v + \frac{1}{2}(f_{uu}(u, v)(\Delta u)^2 + 2f_{uv}(u, v)(\Delta u)(\Delta v) + f_{vv}(u, v)(\Delta v)^2)$$

である .

$f(u, v)$ における曲面の単位法線ベクトルを

$$n = \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$$

とすれば点 $f(u + \Delta u, v + \Delta v)$ と接平面との距離の近似は

$$(f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)) \cdot n$$

$$= \frac{1}{2}(f_{uu}(u, v) \cdot n(\Delta u)^2 + 2f_{uv}(u, v) \cdot n(\Delta u)(\Delta v) + f_{vv}(u, v) \cdot n(\Delta v)^2)$$

ここで

$$L = f_{uu} \cdot n, M = f_{uv} \cdot n, N = f_{vv} \cdot n$$

とおき , $\Delta u, \Delta v$ を $(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0, 0)$ の極限形である du, dv で置き換えて

$$= \frac{1}{2}(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2)$$

ここで

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

とおき , II を曲面 f の第 2 基本形式 , L, M, N を第 2 基本量という .

曲面が与えれば第1基本量 E, F, G , 第2基本量 L, M, N が決まる。

逆に $E > 0, F, G > 0 (EG - F^2 > 0), L, M, N$ を与えたとき曲面が決まるかという問題が曲面の基本定理です。これは、偏微分方程式の問題で、ある条件（可積分条件）のもとで、ただ一つに定まることが示される。

したがって、 $E > 0, F, G > 0 (EG - F^2 > 0), L, M, N$ を与えれば、曲面は完全に決まるのですが、それを E, F, G だけで行うというのがリーマンの提唱した内在幾何（3次元以上はリーマン幾何という）です。それは、曲面を外から見るのではなく、曲面上で生活している立場に立って曲面を考えるという立場です。なお、第1基本量だけで決まる幾何学量を内在量といいます。

曲面の内在幾何に意味があることは、曲面のガウス曲率が内在量である (Theorem egregium) ことを理解する必要があります。

曲面の点 P におけるガウス曲率 (全曲率ともいう) は、点 P を通る曲線の法曲率の最大値と最小値の積で定義し、その値 $K(P)$ は

$$K(P) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

です。式から分かるように、第1基本量、第2基本量両方を用いて表されます。また、法曲率は曲線の曲率ベクトルの法ベクトルへの正射影で決まるので、内在量ではありません (法ベクトルは内在量でない)。第2基本量が関係するのは当たり前のことです。

ところが、曲面の接ベクトルを

$$f_u = \frac{\partial}{\partial u}, f_v = \frac{\partial}{\partial v}$$

とすれば

$$\langle R(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}) \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = -(LN - M^2)$$

すなわち

$$R_{1212} = -(LN - M^2)$$

が成り立つことがガウスにより得られました。これがガウスが驚いたという Theorem egregium です。 R_{1212} は第1基本量だけで決まる値なので、ガウス曲率が第1基本量だけで決まる値であることが分かりました。

断面曲率の定義式

$$K(x, y) = -\frac{R(x, y, x, y)}{|x \times y|^2}$$

で、 x, y は基底をとればよく、分子が R_{1212} で分母は基底の定める平行四辺形の面積なので $EG - F^2$ です。

以上がここで必要な2次元曲面の概略です。

次にどの2次元断面 $\{x, y\}$ をとっても断面曲率が一定である曲面を調べよう。

そのためには次の曲率型テンソルの概念を導入する必要がある。

定義

V をベクトル空間。 V 上の $(0, 4)$ 型テンソル T すなわち 4 重線型写像

$$T : V \times V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

で次の 3 条件

- (1) $T(x, y, z, w) = -T(y, x, z, w), T(x, y, z, w) = -T(x, y, w, z)$
- (2) $T(x, y, z, w) + T(y, z, x, w) + T(z, x, y, w) = 0$
- (3) $T(x, y, z, w) = T(z, w, x, y)$

を満たすものを曲率型テンソルという。

2 つのテンソルがともに曲率型テンソルのとき次の命題が成り立つ。

命題

R, T がともに V 上の曲率型テンソルのとき, $\forall x, y \in V$ に対して

$$R(x, y, x, y) = T(x, y, x, y)$$

が成り立つとき

$$R = T$$

すなわち, $\forall x, y, z, w \in V$ に対して

$$R(x, y, z, w) = T(x, y, z, w)$$

が成り立つ。

証明

テンソル $S = R - T$ を考えることより

任意の x, y で $S(x, y, x, y) = 0$ が成り立つなら任意の x, y, z, w で $S(x, y, z, w) = 0$ が成り立つことを示せばよい。

$$0 = S(x, y + z, x, y + z) = S(x, y, x, y) + S(x, z, x, y) + S(x, y, x, z) + S(x, z, x, z) = S(x, z, x, y) + S(x, y, x, z) = 2S(x, y, x, z)$$

$$\therefore S(x, y, x, z) = 0$$

この式は, 1 番目と 3 番目が同じベクトルなら $S = 0$ を示している。

$$\begin{aligned}
0 &= S(x+y, z, x+y, w) = S(x, z, x, w) + S(y, z, x, w) + S(x, z, y, w) + \\
&S(y, z, y, w) = S(y, z, x, w) + S(x, z, y, w) = S(y, z, x, w) - S(z, x, y, w) \\
\therefore S(y, z, x, w) &= S(z, x, y, w)
\end{aligned}$$

この式は，前の3つのベクトルはサイクリックに入れ替えても等しいことを示している．

したがって，

$$S(x, y, z, w) = S(y, z, x, w) = S(z, x, y, w)$$

一方条件 (2) より

$$S(x, y, z, w) + S(y, z, x, w) + S(z, x, y, w) = 0$$

であるから

$$S(x, y, z, w) = 0$$

ここで，断面曲率を定義する式

$$K(x, y) = -\frac{R(x, y, x, y)}{|x \times y|^2}$$

の分母を見直そう．

ちなみに

$$T(x, y, z, w) = \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle$$

とおけば， T は $(0, 4)$ 型テンソルであり，

$$T(x, y, x, y) = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2 (= |x \times y|^2)$$

である．

微分多様体 M 上の点 P において1次独立な $\forall x, y \in T_P(M)$ に対して，定数 C が存在して

$$K(x, y) = -\frac{R(x, y, x, y)}{|x \times y|^2} = C$$

が成り立てば

$$R(x, y, x, y) = -C(\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2) = -CT(x, y, x, y)$$

したがって，

$$R = -CT$$

である．逆が成り立つのは明らかである．

以上をまとめると次の命題になる．

命題

(M, G) をリーマン多様体とする． M 上の任意の点 P で， P におけるすべての 2 次元断面の決める断面曲率が等しいなら，曲率テンソル場 R はある定数 C が存在して

$$R(x, y, z, w) = -C(\langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle) \quad \dots (\#)$$

となる．

逆に曲率テンソル場が $(\#)$ を満たすなら， P におけるすべての 2 次元断面の決める断面曲率が等しい．

リーマン多様体の断面曲率については次の定理が知られている．

定理 (Schur)

M を 3 次元以上のリーマン多様体とする． M の各点 P で任意の 2 次元断面曲率が一定でその値を $K(P)$ とする．このとき， M 上の関数 $K(P)$ は定値写像である．すなわち，各点で断面曲率が一定であれば，多様体全体で断面曲率は一定である．

定義

M を 3 次元以上のリーマン多様体とする．各点で断面曲率が一定である多様体 M を定曲率多様体という．

3. Ricci 曲率とスカラー曲率

残っている概念は標題のリッチ曲率とスカラー曲率だけです．

(M, g) をリーマン多様体とする． M 上の点 P において， $\forall u, v \in T_P(M)$ に対して

$$T(u, v) : T_P(M) \longrightarrow T_P(M)$$

を

$$T(u, v)(x) = R(x, u)v$$

によって定義する．この $T(u, v)$ は $(1, 1)$ 型テンソル場である．そこで、 $T(u, v)$ のトレースをとったものを $S(u, v)$ と表し、テンソル場 S を多様体 (M, g) のリッチテンソル場という．

$S(u, v)$ を許容座標系 $(U; x^i)$ で表すと

$$S(u, v) = \sum_i dx^i \left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, u\right)v \right)$$

$$= g^{ij} R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, u, v, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

となる．

話を進める前に、多様体上の一次独立なベクトル場を見直すよい機会だとおもう．

許容座標系 $(U; x^i)$ によるベクトル場

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}$$

は議論を簡単にするために互いに直交するような、言い方を変えれば $i \neq j$ のとき $g_{ij} = 0$ であるような許容座標系をとって考えるとしたくなるが、このような許容座標系が本当に存在するかどうかは 2 次元曲面の場合とは違って 3 次元以上の場合には決して簡単な問題ではない．しかし、互いに直交するベクトル場どころか、それぞれが単位ベクトルである、正規直交ベクトル場

$$\{e_1, \dots, e_m\}$$

が存在することは

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}$$

のシュミットの直交化より局所的には存在することがすぐ分かる．

一般に、許容座標近傍 U 上で、1 次独立ベクトル場（直交や正規直交は仮定しない）

$$\{e_1, \dots, e_m\}$$

およびその双対ベクトル、すなわち 1 次微分形式を

$$\{\omega^1, \dots, \omega^m\}$$

を用いて,

$$\nabla_{e_j} e_i = \Gamma_{ij}^k e_k$$

として議論を進めることがよくあり, これはすこぶる優れた方法である.

許容座標近傍 U において基底となる 1 次独立ベクトル場

$$\{e_1, \dots, e_m\}$$

を許容座標ベクトル場 (系) といい, 許容座標ベクトル場系のうち, 正規直交基底となるベクトル場系を許容座標正規直交ベクトル場 (系) というが一般には正規直交基底と呼んでいる.

話をもとに戻そう.

$$S(u, v) = \sum_{i=1}^m dx^i \left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, u\right)v \right)$$

で定義したリッチテンソル場 $S(u, v)$ は M 上の $(0, 2)$ 型のテンソル場

$$S(u, v) : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow C^\infty, (X, Y) \mapsto \sum_i dx^i \left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, X\right)Y \right)$$

である. このテンソル場が対称テンソル場であることを示そう. 曲率テン

ソル場 R の性質より

$$S(u, v) = g^{ij} R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, u, v, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$g^{ij} R\left(u, \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, v\right)$$

$$= g^{ji} R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, v, u, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

である.

リッチテンソル場 S を

$$S = S_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

とおくと

$$S_{ij} = g^{kl} R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)$$

$$= g^{kl} R_{kijl} = R_{kij}^k$$

である.

定義

(M, g) をリーマン多様体, P を M 上の点とする. 任意の $X_P \in T_P(M), X_P \neq 0$ に対して

$$\text{Ric}(X_P) = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{S(X_P, X_P)}{g(X_P, X_P)} = \frac{1}{m-1} \cdot S\left(\frac{X_P}{|X_P|}, \frac{X_P}{|X_P|}\right)$$

によって $\text{Ric}(\cdot)$ を定義し, $\text{Ric}(X_P)$ を M の P における X_P に関するリッチ曲率 (または平均曲率) という.

定義から分かるように $\text{Ric}(\cdot)$ の定義は

任意の単位ベクトル $X_P \in T_P(M), x \neq 0$ に対して

$$\text{Ric}(X_P) = \frac{1}{m-1} S(X_P, X_P)$$

でもよく, この方が一般的である.

リッチ曲率 $\text{Ric}(X_P)$ の図形的意味を調べよう.

$$S(X, Y) = g^{kl} \langle R(e_k, X)Y, e_l \rangle$$

である.

正規直交基底 $\{e_1, \dots, e_m\}$, 双対微分形式を $\{\omega^1, \dots, \omega^m\}$ とすると

$$S(X, Y) = \sum_{k=1}^m \langle R(e_k, X)Y, e_k \rangle = \sum_k R(e_k, X, Y, e_k)$$

であり,

$$S = S_{ij} \omega^i \otimes \omega^j$$

とおくと

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^m R_{kijk}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} \text{Ric}(e_i) &= \frac{1}{m-1} S(e_i, e_i) = \frac{1}{m-1} S_{ii} \\ &= \frac{\sum_{k(\neq i)=1}^m R_{kiii}}{m-1} \dots (\#) \end{aligned}$$

e_i は正規直交基底であるから e_i, e_k の定める平行四辺形 (正方形) は 1 で

あるから $R_{kiii} = -R_{ikik}$ は $\{e_i, e_k\}$ の断面曲率である．したがって (#) は $m - 1$ 個の断面曲率すなわち断面

$$\{e_1, e_i\}, \dots, \{e_{i-1}, e_i\}, \{e_{i+1}, e_i\}, \{e_m, e_i\}$$

の平均である．

リーマン多様体 (M, g) が定曲率のとき，断面曲率はいたるところ一定であるからリッチ曲率 $\text{Ric}(X_p)$ は一定である．したがって

$$\text{Ric}(X_p) = S \left(\frac{X_p}{|X_p|}, \frac{X_p}{|X_p|} \right) = f(P)$$

とおけば

$$S(X_p, X_p) = f(P)|X_p|^2 = f(P)g(X_p, X_p)$$

である．定曲率より広い概念として

$$S = S_{ij}\omega^i \otimes \omega^j = fg_{ij}\omega^i \otimes \omega^j$$

が成り立つ多様体 (M, g) をアインシュタイン多様体という．定曲率についての Schur の定理と同様に $\dim(M) \geq 3$ のとき $f(p)$ は定数値関数であることが知られている．

次にスカラー曲率を定義する．

2 階共変対称テンソル場 S を次のように $(1, 1)$ 型のテンソル場 S^* に変換する．

任意の X, Y に対して

$$\langle S^*(X), Y \rangle = S(X, Y)$$

ここで， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は計量テンソル g による内積．

S^* のトレース $\text{Tr}(S^*)$ を $m(m - 1)$ で割った値を K で表す．すなわち

$$K = \frac{\text{Tr}(S^*)}{m(m - 1)}$$

K は $(1, 1)$ 型のテンソル場のトレースであるから関数になり，この関数

K を多様体 (M, g) のスカラー曲率という．この値は座標変換によらないので計算しやすい基底を用いてよい．

スカラー曲率の図形的意味を調べよう．

S^* は

$$\begin{aligned} \langle S^*(X), Y \rangle &= S(X, Y) \\ &= g^{ij} \langle R(e_i, X)Y, e_j \rangle \\ &= g^{ij} R(e_i, X, Y, e_j) \\ &= g^{ij} R(X, e_i, e_j, Y) \\ &= \langle g^{ij} R(X, e_i)e_j, Y \rangle \end{aligned}$$

より

$$S^* = g^{ij} R(X, e_i)e_j$$

である．

$$\begin{aligned} \text{Tr}(S^*) &= \sum_{k=1}^m \omega^k g^{ij} (R(e_k, e_i)e_j) \\ &= g^{kl} g^{ij} \langle R(e_k, e_i)e_j, e_l \rangle = g^{kl} g^{ij} R_{kijl} \end{aligned}$$

特に正規直交基底を用いれば

$$\text{Tr}(S^*) = \sum_{i,k=1}^m R_{kii}$$

ここで，

$$S_{ii} = \sum_{k(\neq i)=1}^m R_{kii}$$

および

$$\text{Ric}(e_i) = \frac{1}{m-1} S(e_i, e_i) = \frac{1}{m-1} S_{ii} = \frac{\sum_{k(\neq i)=1}^m R_{kii}}{m-1}$$

であるからスカラー曲率 K は

$$K = \frac{S^*}{m} = \frac{\sum_{k(\neq i)=1}^m \text{Ric}(e_i)}{m}$$

すなわちリッチ曲率の平均である．

ここで，テンソル計算で用いた内容をまとめておきます．必要に応じて活用してください．

ベクトル空間 V に計量テンソル g を与えた (V, g) をユークリッド (ベクトル) 空間という。それは, V に正規直交基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を定めればこの基底をもとに V と n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n が同一視できるからです。

以後必要に応じて \sum も用いるが和についてはアインシュタイン規約に従うとする。

ユークリッドベクトル空間 (V, g) と V の双対空間 V^* について V の基底を $\{e_1, \dots, e_n\}$, その双対基底を $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ とする。

V の計量テンソル g の基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ による成分を $\{g_{ij}\}$ とする。すなわち

$$g = g_{ij} \omega^i \otimes \omega^j$$

さらに, 行列 (g_{ij}) の逆行列を (g^{ij}) とし, V^* の計量テンソル g^* を

$$g^* = g^{ij} e_i \otimes e_j$$

とする。また V の内積を

$$\langle u, v \rangle = g(u, v); u, v \in V$$

と $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表し, V^* の内積を

$$\langle \alpha, \beta \rangle_* = g^*(\alpha, \beta); \alpha, \beta \in V^*$$

と $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ で表す。

ユークリッド空間 V とその双対空間 V^* とは対応

$$f: V \longrightarrow V^*$$

$$(\text{ただし } f(u)(v) = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V)$$

で同一視する。

f を基底を用いて表す。

$$V \ni v = x^i e_i \text{ のとき}$$

$$f(v) = f(x^i e_i) = y_j \omega^j$$

とおくと

$$y_j = f(x^i e_i)(e_j) = \langle x^i e_i, e_j \rangle = x^i g_{ij}$$

である。

$$f: x^i e_i \mapsto y_j \omega^j$$

のとき $\{x^i\}, \{y_i\}$ の関係を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \cdots (\#)$$

行列 (g_{ij}) は逆行列をもつから

$$f: V \longrightarrow V^*$$

は同型写像である。

(#) を $\{x^i\}$ について解くと (g_{ij}) の逆行列をもちいて

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & \dots & g^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \dots & g^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

となる。したがって, V と V^* を同一視するとき

$$x^i e_i \longleftrightarrow y_i \omega^i$$

とすると

$$y_i = g_{ij}x^j, x^i = g^{ij}y_j \cdots (b)$$

(b) の第 1 式はすでに定義されました, 第 2 式の関係を探みましょう.

$h: V^* \rightarrow V$ を

$$\beta(h(\alpha)) = \langle \alpha, \beta \rangle_*, \forall \alpha, \beta \in V^*$$

で定義する,

$\alpha = y_i \omega^i$ のとき $h(\alpha) = x^i e_i$ とおく. このとき

$$x^i = \alpha(\omega^i) = \langle y_j \omega^j, \omega^i \rangle_* = y_j g^{ji}$$

これは (b) の第 2 式と一致する.

したがって V と V^* の同一視は

$$x^i e_i \longleftrightarrow y_i \omega^i$$

のとき

$$y_i = g_{ij}x^j, x^i = g^{ij}y_j$$

で行われるがこの同一視を

$$f: V \rightarrow V^*, h = f^{-1}: V^* \rightarrow V$$

とすると

$$f(v)w = \langle v, w \rangle, v, w \in V; \beta(h(\alpha)) = \langle \alpha, \beta \rangle_*, \alpha, \beta \in V^*$$

である.

また, $f: (V, g) \rightarrow (V^*, g^*)$ は内積をたもつ. 実際

$u = x^i e_i, v = y^i e_i$ のとき

$$\langle f(u), f(v) \rangle_* = (x^i g_{ik} \omega^k, y^j g_{jl} \omega^l)$$

$$= x^i y^j g_{ik} g_{jl} g^{kl}$$

$$= x^i y^j g_{ij} = \langle u, v \rangle$$

以上をまとめると次のようになる.

V, V^* の同一視を表す写像を

$$f: V \rightarrow V^*, h = f^{-1}: V^* \rightarrow V$$

とし V, V^* の同一視を

$$x^i e_i \longleftrightarrow y_i \omega^i$$

とすれば

$$y_i = g_{ij}x^j, x^i = g^{ij}y_j$$

を満たす. これを添字の上げ下げという.

$$f(u)(v) = \langle u, v \rangle$$

であり, $f(u) = \alpha$ とすると $h(\alpha) = u$ であるから

$$\alpha(v) = \langle u, v \rangle = \langle h(\alpha), v \rangle = \langle \alpha, f(v) \rangle_*$$

である.

すなわち, $\alpha(v)$ で α を反変ベクトルに変えれば, 反変ベクトルの内積を用いて計算し, v を共変ベクトルに変えれば, 共変ベクトルの内積を用いて計算すればよい.

次にテンソルの縮約について述べる.

線型変換すなわち (1, 1) 型のテンソルの縮約はトレース (行列で対角成分の和) をもとめることである。このトレースを利用すると縮約がわかりやすい。

f が (1, 1) 型のテンソルのとき f のトレースは

$$\sum_{i=1}^n \omega^i(f(e_i)) = \sum_{i=1}^n f(e_i, \omega^i)$$

である。

縮約はテンソルの内部でトレースをとることですが、つぎのように考えるとわかりやすい。

(2, 3) 型のテンソルで説明する。

$$S = S_{klm}^{ij} e_i \otimes e_j \otimes \omega^k \otimes \omega^l \otimes \omega^m$$

で 2 番目の反変成分と 3 番目の共変成分を縮約して得られ (1, 2) 型のテンソル T は、

$S(\alpha, \cdot, u, v, \cdot)$ が (1, 1) がテンソルであり、このテンソルを縮約すなわちトレースを取ったもの。すなわち

$$\begin{aligned} T(\alpha, u, v) &= \sum_{i=1}^n \omega^i(S(\alpha, \cdot, u, v, e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n (S(\alpha, \omega^i, u, v, e_i)) \cdots (\#) \end{aligned}$$

ちなみに、 $(\#)$ が縮約の定義式である。 i 番目の反変成分と j 番目の共変成分の縮約を C_j^i と表す。

$u = u^i e_i, v = v^i e_i, \alpha = \alpha_i \omega^i$ のとき $C_3^2(S) = T$ の成分表示すると

$$\begin{aligned} T(\alpha, u, v) &= S(\alpha, \omega^i, u, v, e_i) \\ &= S_{kli}^{ji} \alpha_j u^k v^l \end{aligned}$$

したがって

$$T = T_{kl}^j e_j \otimes e_k \otimes e_l$$

において、 T_{kl}^j を \sum を用いて表せば

$$T_{kl}^j = \sum_{i=1}^n S_{kli}^{ji} \cdots (b)$$

であり、 (b) が一般的なテンソルの縮約の定義である。

本稿のリッチテンソル S は (1, 3) 型のテンソル R の共変第 1 成分と反変成分の縮約で、

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n dx^i (R(\frac{\partial}{\partial x^i}, X)Y)$$

と定義していますが、これは (1, 1) 型のテンソル $R(\cdot, X)Y$ のトレースとして定義したものです。

4. ベクトルの平行移動

ユークリッド空間でベクトルを微分するとき、異なる 2 点のベクトルの差

は、平行移動して始点をそろえて行っている。多様体上でのベクトルの微分はベクトルの平行移動をどのように行うかが問題なのであるが、共変微分の定義は、平行移動から離れて、疑似接続を定義し、その中で対称で距離と適合する接続が唯一決まり、その接続をリーマン接続として議論を進めてきた。接続の語義は各点で定義される接ベクトル空間どうしのつながりである。それを

「共変微分の定義である $\{\Gamma_{ij}^k\}$ を定めることを接続を与えるという」

ではちょっとおかしい。最後にベクトルの平行移動について扱おう。なお、この平行移動はリーマン接続である必要はなく、一般の疑似接続でなりたつことである。さらに Γ_{ij}^k があれば考えられることで、多様体の各点にベクトル空間を対応させた場合でも考えられることに注意すべきである。これは将来リーマン幾何学をさらに高い位置から眺めたとき用いられる。

まず、曲線に沿っての平行ベクトル場の定義をする。

定義

$(M; \Gamma_{ij}^k)$ を疑似接続空間とする。

$$C : [a, b] \longrightarrow M$$

を M 上の滑らかな曲線。 M 上のベクトル場 X が曲線 C に沿って平行とは

$$\nabla_{C'(t)} X = 0 \quad (\forall t \in [a, b])$$

を満たすことである。

許容座標系 $(U; x^i)$ を用いてベクトル場の平行の条件を調べよう。

$(U; x^i)$ における曲線 $C(t)$ 上のベクトル場 X を

$$X(t) = X(C(t)) = X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{C(t)}$$

$$x^i(C(t)) = x^i(t)$$

とする .

$$C'(t) = \frac{dx^i(C(t))}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

であるから

$$\nabla_{C'(t)} X = \sum_{k=1}^m \left(\frac{dX^k(t)}{dt} + \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(m,m)} \Gamma_{ij}^k X^i(t) \frac{dx^j(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{C(t)}$$

が成り立つ . これは接ベクトル場 X が曲線 $C(t)$ に沿って平行であるための必要十分条件はベクトル場 X の成分 $\{X^i\}$ が微分方程式

$$\frac{dX^k(t)}{dt} + \sum \Gamma_{ij}^k X^i(t) \frac{dx^j(t)}{dt} = 0$$

を満たすことを意味している .

この 1 階の斉次常微分方程式は初期条件

$$(X^1(0), \dots, X^m(0))$$

を与えればただ一つの解が存在することが知られているので , $T_{C(0)}$ に属する接ベクトルを与えれば , 曲線 $C(t)$ に沿った平行な接ベクトルが唯一つ決まることが分かる . このことは , 曲線 $C(t)$ に沿って平行なベクトル場全体のベクトル空間と接ベクトル空間 $T_{C(0)}M$ は同型であることを意味している . さらにこの同型によって , $C(t)$ 上の異なる 2 点 $C(t_1), C(t_2)$ における接ベクトル間の同型対応が定義できる . この対応 $P_{t_1}^{t_2}$

$$P_{t_1}^{t_2} : T_{C(t_1)}(M) \longrightarrow T_{C(t_2)}(M)$$

が多様体上のベクトルの平行移動です . この平行移動は接続 Γ_{ij}^k が与えられれば定義できることに注意しましょう .

この平行移動を用いてベクトルを定義に従って微分し , 共変微分と一致することを示しましょう . すなわち ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_h^0(X(C(h))) - X(C(0))}{h} = \nabla_{C'(0)} X \quad \dots (\#)$$

を示します .

$T_{C(0)}(M)$ の基底の一つを $\{e_1, \dots, e_m\}$ とし , 初期条件が e_i である , 曲線 $C(t)$ 上の平行なベクトル場を $e_i(t)$ とする .

$$X(C(t)) = X^i(t)e_i(t)$$

とおくと, $\nabla_{C'(t)} e_i(t) = 0$ であるから,

$$\nabla_{C'(t)} X(C(t)) = \frac{dX^i(t)}{dt} e_i(t)$$

である.

一方,

$$P_h^0(X(C(h))) = X^i(h) e_i(0)$$

であるから

$$\begin{aligned} & \frac{P_h^0(X(C(h))) - X(C(0))}{h} \\ &= \frac{X^i(h) - X^i(0)}{h} e_i(0) = \frac{dX^i(t)}{dt} e_i(0) \end{aligned}$$

したがって (#) が証明された.

ここまでは, リーマン計量は関係していない. 最後に曲線に沿った平行なベクトルは, ユークリッド空間における平行と似た性質があることを示そう.

$X(C(t)), Y(C(t))$ をともに曲線 $C(t)$ 上の平行なベクトル場とする. このとき

$$\begin{aligned} & \frac{d \langle X(C(t)), Y(C(t)) \rangle}{dt} \\ &= \langle \nabla_{C'(t)} X(C(t)), Y(C(t)) \rangle + \langle X(C(t)), \nabla_{C'(t)} Y(C(t)) \rangle = 0 \end{aligned}$$

したがって, $\langle X(C(t)), Y(C(t)) \rangle$ は一定である. これは, ある曲線に沿って平行なベクトル場の大きさが一定であることを示している. さらに, 2つの平行なベクトルのなす角も一定である. すなわち, $T_{C(T_1)}(M)$ と $T_{C(T_2)}(M)$ の同型写像

$$P_{t_1}^{t_2} : T_{C(T_1)}(M) \longrightarrow T_{C(T_2)}(M)$$

はベクトル空間として同型だけでなく, 等長同型である.