

7. 曲率

7.1 曲率テンソル

ここでは曲率テンソルを学びます．すでに接続すなわち多様体上の偏微分を学びました．多様体の上でベクトルに対して2度偏微分を行うと，交換可能ではありません，すなわち $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ で $\nabla_X \nabla_Y Z$ と $\nabla_Y \nabla_X Z$ は異なります．したがって，その差がきちんと計算できないかぎり，多様体上の微分ができることにはなりません．ガウスはこの差が曲面の曲がり方すなわちガウス曲率で表せることが分かりました．それが通常「ガウスの驚異の定理」といわれる内容です．ガウスは2次元曲面を研究しました．曲面論の方を見てもらえば分かりますが，2次元でもその差は複雑です．その後の数学者は，高次元におけるこの問題をテンソルの概念を用いて解決しました．

リーマン幾何の土台としての最後の難所です．ゆっくり読みすすめてください．

まず， $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ に対して

$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

を

$$T(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$$

によって定義すると T はテンソルではありません．実際

$$T(fX, Y, Z) = fT(X, Y, Z) - Y(f)\nabla_X Z$$

となります．そこで修正項を付け加えた次の定義をします．

定義

(M, g) をリーマン多様体， ∇ をリーマン接続とする．任意の $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ に対して $R(\cdot, \cdot), R$ を次のように定義する．ただし， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は g より決まる内積である．

$$R(\cdot, \cdot) : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

を

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

によって定義し,

$$R(X, Y, Z, W) : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

を

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$$

によって定義する.

ここで定義した $R(X, Y), R$ をともに曲率テンソルという.

上記の作用素がテンソルであることを示そう. そのためには次の命題を示せばよい.

命題

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M), \forall f \in C^\infty(M)$ に対して次が成り立つ.

$$(1) R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$$

$$(2) R(fX, Y)Z = fR(X, Y)Z, R(X, fY)Z = fR(X, Y)Z$$

$$(3) R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z$$

証明

(1) は $[X, Y] = -[Y, X]$ より明らか.

(2) 交換子積 $[X, Y]$ について

$$[fX, Y] = f[X, Y] + Y(f)X$$

が成り立つことに注意する.

$$\nabla_{fX} \nabla_Y Z = f \nabla_X \nabla_Y Z$$

$$\nabla_Y \nabla_{fX} Z = \nabla_Y (f \nabla_X Z) = Y(f) \nabla_X Z + f \nabla_Y \nabla_X Z$$

$$\nabla_{[fX, Y]} Z = f \nabla_{[X, Y]} Z - Y(f) \nabla_X Z$$

より (2) の前半の式が成り立つ. 後半は (1) より成り立つことが分かる.

(3) は少し計算が面倒だが単純な計算である.

$$\nabla_X \nabla_Y (fZ) = \nabla_X (Y(f)Z) + \nabla_X (f \nabla_Y Z)$$

$$\begin{aligned}
&= X(Y(f))Z + Y(f)\nabla_X Z + X(f)\nabla_Y Z + f\nabla_X \nabla_Y Z \\
\nabla_Y \nabla_X (fZ) &= Y(X(f))Z + X(f)\nabla_Y Z + Y(f)\nabla_X Z + f\nabla_Y \nabla_X Z \\
\nabla_{[X,Y]} fZ &= ([X,Y]f)Z + f\nabla_{[X,Y]} Z
\end{aligned}$$

ここで

$$[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

であるから成り立つ .

次の恒等式は Biabchi の恒等式と呼ばれている .

命題

(M, g) をリーマン多様体 , ∇ をリーマン接続とする . 任意の $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ に対して次の等式が成り立つ .

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

証明

ここでは , 接続が対称である , すなわち

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

が成り立つことを用いる (これはリーマン接続の条件の 1 つ) .

$$\begin{aligned}
&R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\
&+ \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X \\
&+ \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= \nabla_X (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - \nabla_{[Y,Z]} X \\
&+ \nabla_Y (\nabla_Z X - \nabla_X Z) - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&+ \nabla_Z (\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[X,Y]} Z \\
&= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0
\end{aligned}$$

最後の等号は , 交換子積の Jacobi 恒等式である .

次に

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$$

で定義された曲率 R の性質を調べよう．なお

$$R(\cdot, \cdot) : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

この2つのテンソルはユークリッド空間上表現が異なるだけで同一視するテンソルである．実際，後で許容座標系による成分を計算するが添字の上げ下げする規則に従う．

命題

(M, g) をリーマン多様体， ∇ をリーマン接続とする．リーマンテンソル

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

は任意の $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ に対して次の等式が成り立つ．

$$(1) \quad R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$$

$$(2) \quad R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$$

$$(3) \quad R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$$

$$(4) \quad R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$$

証明

(1) は定義より，(3) は $R(\cdot, \cdot)$ の Bianchi の恒等式より明らかである．

(2)

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle$$

$$= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle$$

ここで

$$\langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle = X \langle \nabla_Y Z, W \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W \rangle$$

$$= XY \langle Z, W \rangle - X \langle Z, \nabla_Y W \rangle - Y \langle Z, \nabla_X W \rangle + \langle Z, \nabla_Y \nabla_X W \rangle$$

同様に

$$\langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle = YX \langle Z, W \rangle - Y \langle Z, \nabla_X W \rangle - X \langle Z, \nabla_Y W \rangle + \langle Z, \nabla_X \nabla_Y W \rangle$$

また ,

$$\langle \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle = [X, Y] \langle Z, W \rangle - \langle Z, \nabla_{[X,Y]} W \rangle$$

これらの式より

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = - \langle Z, R(X, Y)W \rangle$$

を得る .

$$\therefore R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$$

(4)

(3) と同様の式を他に 3 つつくる . すなわち

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$$

$$R(Y, Z, W, X) + R(Z, W, Y, X) + R(W, Y, Z, X) = 0$$

$$R(X, Z, W, Y) + R(Z, W, X, Y) + R(W, X, Z, Y) = 0$$

$$R(X, Y, W, Z) + R(Y, W, X, Z) + R(W, X, Y, Z) = 0$$

辺々加え (1),(2) を用いると

$$R(X, Z, W, Y) + R(Y, W, X, Z) = 0$$

を得る .

$$\therefore R(X, Z, W, Y) = R(W, Y, X, Z)$$

次に , 許容座標系 $(U; x^i)$ を用いて曲率テンソルの成分を求めよう .

テンソル $R(\cdot, \cdot)$ は (1, 3) 型テンソルである .

$$R = R_{ijk}{}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$$

とおけば ,

$$R_{ijk}{}^l = R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, dx^l\right)$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\Gamma_{kj}^t \frac{\partial}{\partial x^t} \right)$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{kj}^t}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^t} + \Gamma_{kj}^t \Gamma_{ti}^s \frac{\partial}{\partial x^s}$$

添字をそろえて

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^t}{\partial x^i} + \Gamma_{kj}^s \Gamma_{si}^t \right) \frac{\partial}{\partial x^t} \\
 &\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0 \text{ であるから} \\
 &R \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\
 &= \left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^t}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^t}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^s \Gamma_{si}^t - \Gamma_{ki}^s \Gamma_{sj}^t \right) \frac{\partial}{\partial x^t}
 \end{aligned}$$

したがって,

$$R_{ijk}{}^l = \frac{\partial \Gamma_{kj}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^s \Gamma_{si}^l - \Gamma_{ki}^s \Gamma_{sj}^l$$

であり,

$$R = R_{ijk}{}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$$

となる.

$X, Y \in \mathcal{X}(M)$ を固定すれば $R(X, Y)$ は $(1, 1)$ 型のテンソルであるが,

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

のとき,

$$R(X, Y) = X^i Y^j R_{ijk}{}^l dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$$

となる.

さらに $(0, 4)$ 型曲率テンソル R は

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right)$$

$$= \langle R_{ijk}{}^t \frac{\partial}{\partial x^t}, \frac{\partial}{\partial x^l} \rangle$$

$$= R_{ijk}{}^t g_{tl}$$

$$\therefore R_{ijkl} = R_{ijk}{}^t g_{tl}$$

これは, ユークリッド空間 (内積が付与されたベクトル空間) では内積により反変ベクトルと共変ベクトルが同一視され, その同一視をより $(1, 3)$ 型の曲率テンソルと $(0, 4)$ 型の曲率テンソルは同じテンソルである.

なお, ここで求めた $R_{ijk}{}^t, R_{ijkl}$ は曲面のガウス曲率を求めるときに出て

きた式と同じ式であることが後で用いられる。

7.2 断面曲率

曲面論ではガウス曲率を考えました。それに対応するものとして、高次元の多様体では断面曲率を考えます。

(M, g) を m 次元リーマン多様体とします。 M 上の任意の点 P における任意の接ベクトル $x, y \in T_P(M)$ に対して、 $|x \times y|$ を

$$|x \times y|^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2$$

によって定義する。すなわち、 x, y が一次独立のとき $|x \times y|$ は x, y の決める平行四辺形の面積である。

x, y が一次独立のとき x, y の決める $T_P(M)$ の2次元部分空間を $\{x, y\}$ で表し M の P における2次元断面という。

x, y が一次独立のとき、

$$K(x, y) = -\frac{R(x, y, x, y)}{|x \times y|^2}$$

で $K(x, y)$ を定義し、 $K(x, y)$ が $\{x, y\}$ の一次独立な2つのベクトルのとり方によらないことを示す。ちなみに後で定義をするがこの値が2次元断面 $\{x, y\}$ の決める断面曲率である。

$\forall u, v \in \{x, y\}$ は一次独立とする。

$$u = ax + by, v = cx + dy$$

とおくと、

$$|u \times v|^2 = |(ax + by) \times (cx + dy)| = (ad - bc)^2 |x \times y|^2$$

一方、 $R(u, v, u, v)$ は前の2項、後ろの2項に関して交代であるあるから

$$R(u, v, u, v) = R(ax + by, cx + dy, ax + by, cx + dy)$$

$$= (ad - bc)^2 R(x, y, x, y)$$

したがって、

$$K(x, y) = -\frac{R(x, y, x, y)}{|x \times y|^2}$$

によって K を定義すると, $K(x, y)$ の値は 1 次独立な $\{x, y\}$ に属する 2 つのベクトルのとり方によらないことが分かる.

定義

M をリーマン多様体とする. $P \in M$ で $T_P(M)$ の 1 次独立な任意のベクトル x, y に対して

$$K(x, y) = -\frac{R(x, y, x, y)}{|x \times y|^2}$$

によって $K(x, y)$ を定義する. ただし, $|x \times y|^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2$.

$K(x, y)$ を 2 次元断面 $\{x, y\}$ の決める断面曲率という.

次にどの 2 次元断面 $\{x, y\}$ をとっても断面曲率が一定である曲面を調べよう.

そのためには次の曲率型テンソルの概念を導入する必要がある.

定義

V をベクトル空間. V 上の $(0, 4)$ 型テンソル T すなわち 4 重線型写像

$$T : V \times V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

で次の 3 条件を満たすものを曲率型テンソルという.

- (1) $T(x, y, z, w) = -T(y, x, z, w), T(x, y, z, w) = -T(x, y, w, z)$
- (2) $T(x, y, z, w) + T(y, z, x, w) + T(z, x, y, w) = 0$
- (3) $T(x, y, z, w) = T(z, w, x, y)$

2 つのテンソルがともに曲率型テンソルのとき次の命題が成り立つ.

命題

R, T がともに V 上の曲率型テンソルのとき, $\forall x, y \in V$ に対して

$$R(x, y, x, y) = T(x, y, x, y)$$

が成り立つとき

$$R = T$$

すなわち, $\forall x, y, z, w \in V$ に対して

$$R(x, y, z, w) = T(x, y, z, w)$$

が成り立つ .

証明

テンソル $S = R - T$ を考えることより

任意の x, y で $S(x, y, x, y) = 0$ が成り立つなら任意の x, y, z, w で $S(x, y, z, w) = 0$ が成り立つことを示せばよい .

$$0 = S(x, y + z, x, y + z) = S(x, y, x, y) + S(x, z, x, y) + S(x, y, x, z) + S(x, z, x, z) = S(x, z, x, y) + S(x, y, x, z) = 2S(x, y, x, z)$$

$$\therefore S(x, y, x, z) = 0$$

この式は, 1 番目と 3 番目が同じベクトルなら $S = 0$ を示している .

$$0 = S(x + y, z, x + y, w) = S(x, z, x, w) + S(y, z, x, w) + S(x, z, y, w) + S(y, z, y, w) = S(y, z, x, w) + S(x, z, y, w) = S(y, z, x, w) - S(z, x, y, w)$$

$$\therefore S(y, z, x, w) = S(z, x, y, w)$$

この式は, 前の 3 つのベクトルはサイクリックに入れ替えても等しいことを示している .

したがって,

$$S(x, y, z, w) = S(y, z, x, w) = S(z, x, y, w)$$

一方 (2) より

$$S(x, y, z, w) + S(y, z, x, w) + S(z, x, y, w) = 0$$

であるから

$$S(x, y, z, w) = 0$$

ここで, 断面曲率を定義する式

$$K(x, y) = -\frac{R(x, y, x, y)}{|x \times y|^2}$$

の分母を見直そう .

$$T(x, y, z, w) = \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle$$

とおけば , T は $(0, 4)$ 型テンソルであり ,

$$T(x, y, x, y) = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2$$

である .

微分多様体 M 上の点 P において 1 次独立な $\forall x, y \in T_P(M)$ に対して, 定数 C が存在して

$$K(x, y) = -\frac{R(x, y, x, y)}{|x \times y|^2} = C$$

が成り立てば

$$R(x, y, x, y) = -C(\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2) = -CT(x, y, x, y)$$

したがって ,

$$R = -CT$$

である . 逆が成り立つのは明らかである .

以上をまとめると次の命題になる .

命題

(M, G) をリーマン多様体とする . M 上の任意の点 P で , P におけるすべての 2 次元断面の決める断面曲率が等しいなら , 曲率テンソル R はある定数 C が存在して

$$R(x, y, z, w) = -C(\langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle) \quad \cdots (\#)$$

となる .

逆に曲率テンソルが $(\#)$ を満たすなら , P におけるすべての 2 次元断面の決める断面曲率が等しい .

リーマン多様体の断面曲率については次の定理が知られている .

定理 (Schur)

M を 3 次元以上のリーマン多様体とする . M の各点 P で任意の 2 次元断面曲率が一定でその値を $K(P)$ とする . このとき , M 上の関数 $K(P)$ は

定値写像である．すなわち，各点で断面曲率が一定であれば，多様体全体で断面曲率は一定である．

定義

M を 3 次元以上のリーマン多様体とする．各点で断面曲率が一定である多様体 M を定曲率多様体という．

7.3 Ricci 曲率とスカラー曲率

残っている概念は標題の Ricci 曲率とスカラー曲率だけです．Ricci 曲率は曲面の主曲率に対応します．

(M, g) をリーマン多様体とする． M 上の点 P において， $\forall u, v \in T_P(M)$ に対して

$$T(u, v) : T_P(M) \longrightarrow T_P(M)$$

を

$$T(u, v)(x) = R(x, u)v$$

によって定義する．この $T(u, v)$ は $(1, 1)$ 型テンソルである．そこで，ここで $T(u, v)$ のトレースをとったものを $\text{Ric}(u, v)$ と表す．

$\text{Ric}(u, v)$ を許容座標系 $(U; x^i)$ で表すと

$$\text{Ric}(u, v) = dx^i \left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, u\right)v \right)$$

$$= g^{ij} R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, u, v, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

となる．

話を進める前に，多様体上の一次独立なベクトル場を見直すよい機会だとおもう．というのは $\text{Ric}(u, v)$ は $(1, 1)$ 型のテンソルの縮約をしているので，座標の取り方によらない値です．どのような許容座標系で考えても同じになる．

一方許容座標系 $(U; x^i)$ によるベクトル場

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}$$

は議論を簡単にするために互いに直交するような、言い方を変えれば $i \neq j$ のとき $g_{ij} = 0$ であるような許容座標系をとって考えるとしたくなるが、このような許容座標系が本当に存在するかどうかは曲面の場合とは違って決して簡単な問題ではない。しかし、互いに直交するベクトル場どころか、それぞれが単位ベクトルである、正規直交基底直交ベクトル場

$$\{e_1, \dots, e_m\}$$

が存在することは

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}$$

のシュミットの直交化より局所的には存在することがすぐ分かる。

一般に、許容座標近傍 U 上で、1次独立ベクトル場（直交や正規直交は仮定しない）

$$\{e_1, \dots, e_m\}$$

およびその双対ベクトル、すなわち1次微分形式を

$$\{\omega^1, \dots, \omega^m\}$$

を用いて、

$$\nabla_{e_j} e_i = \Gamma_{ij}^k e_k$$

として議論を進めることがよくあり、これはすこぶる優れた方法である。

話をもとに戻そう。

$$\text{Ric}(u, v) = dx^i \left(R \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, u \right) v \right)$$

で定義した $\text{Ric}(u, v)$ は M 上の $(0, 2)$ 型のテンソルで

$$\text{Ric}(u, v) : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow C^\infty$$

である。このテンソルを M 上の Ricci 曲率テンソルという。

Ricci 曲率テンソルは対称テンソルであることを示そう。

$$\text{Ric}(u, v) = g^{ij} R \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, u, v, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

であるから曲率テンソル R の性質より対称テンソルであることが分かる。

なお、

$$\text{Ric} = R_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

とおくと

$$R_{ij} = g^{kl} R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\ = g^{kl} R_{kill} = R_{kij}{}^k$$

である。

定義

(M, g) をリーマン多様体, P を M 上の点とする. 任意の $x \in T_P(M), x \neq 0$ に対して

$$\text{Ric}(x) = \frac{\text{Ric}(x, x)}{g(x, x)} = \text{Ric}\left(\frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|}\right)$$

によって Ric を定義し, $\text{Ric}(x)$ を M の P における x 方向の Ricci 曲率という。

Ricci テンソルの $\text{Ric}(\cdot, \cdot)$ を見直そう. 対称変換は対角化できる. すなわち. 基底を取り直し対角行列にすることができる. すなわち, $T_P(M)$ の正規直交基底

$$\{e_1, \dots, e_m\}$$

および, その双対基底

$$\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$$

として

$$\text{Ric} = \sum_{i=1}^m R_{ii} \omega^i \otimes \omega^i$$

と表せる. ここで $R_{ii} = R(e_i, e_i) = \text{Ric}(e_i)$ である.

このとき, $\forall u \in T_P(M)$ に対して u の正規直交基底 $\{e_1, \dots, e_m\}$ のに対する方向余弦すなわち

$$a_i = \langle u, e_i \rangle = \cos \theta_i \quad (\theta_i \text{ は } u \text{ と } e_i \text{ のなす角})$$

で定まる a^1, \dots, a^m を用いて, u と同じ向き of 単位ベクトルは

$$\frac{u}{|u|} = a^i e_i$$

と表せるから,

$$\text{Ric}(u) = \sum_{i=1}^m R_{ii} a_i^2$$

となる．ここで， e_i を点 P における Ricci 主方向， R_{ii} を主方向 e_i の主曲率という．

最後にスカラー曲率を定義する．

$$\text{Ric} = \sum_{i=1}^m R(e_i, e_i) \omega^i \otimes \omega^i$$

における $\{e_i\}$ は $(0, 2)$ 型テンソル Ric の対角化の単位固有ベクトルを用いていた．ここで

$$S = \sum_{i=1}^m \text{Ric}(e_i, e_i)$$

を考える． S の値は正規直交基底 $\{e_i\}$ のとり方によらないことに注意する．

実際 $T_P(M)$ の別の正規直交基底を $\{f_i\}$ ，ただし $f_i = a_i^j e_j$ とする． Ric は $(0, 2)$ 型のテンソルであるから，

$$\sum_{i=1}^m \text{Ric}(f_i, f_i) = \sum_{i=1}^m a_i^j a_i^k \text{Ric}(e_j, e_k) = \sum_{i=1}^m \text{Ric}(e_i, e_i)$$

となり， $\sum_{i=1}^m R(e_i, e_i)$ が $T_P(M)$ の正規直交基底のとり方によらないことが示された．そこでスカラー曲率を次のように定義する．

定義

M を m 次元微分多様体， P を M 上の任意の点とする． $T_P(M)$ の正規直交基底の一つを $\{e_1, \dots, e_m\}$ による

$$S = \sum_{i=1}^m \text{Ric}(e_i, e_i)$$

の値を M の P におけるスカラー曲率という．

7.4 ベクトルの平行移動

ユークリッド空間でベクトルを微分するとき，異なる2点のベクトルの差は，平行移動して始点をそろえて行っている．多様体上でのベクトルの微分はベクトルの平行移動をどのように行うかが問題なのであるが，共変微分の定義は，平行移動から離れて，疑似接続を定義し，その中で対称で距離と適合する接続が唯一決まり，その接続をリーマン接続として議論を進めてきた．接続の語義は各点で定義される接ベクトル空間どうしのつながりである．それを

「共変微分の定義である $\{\Gamma_{ij}^k\}$ を定めることを接続を与えるという」

ではちょっとおかしい．最後にベクトルの平行移動について扱おう．なお，この平行移動はリーマン接続である必要はなく，一般の疑似接続でないたつことである．さらに Γ_{ij}^k があれば考えられることで，多様体の各点にベクトル空間を対応させた場合でも考えられることに注意すべきである．これは将来リーマン幾何学をさらに高い位置から眺めたとき用いられる．

まず，曲線に沿っての平行ベクトル場の定義をする．

定義

$(M; \Gamma_{ij}^k)$ を疑似接続空間とする．

$$C : [a, b] \longrightarrow M$$

を M 上の滑らかな曲線． M 上のベクトル場 X が曲線 C に沿って平行とは

$$\nabla_{C'(t)} X = 0 \quad (\forall t \in [a, b])$$

を満たすことである．

許容座標系 $(U; x^i)$ を用いてベクトル場の平行の条件を調べよう．

$(U; x^i)$ における曲線 $C(t)$ 上のベクトル場 X を

$$X(t) = X(C(t)) = X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{C(t)}$$

$$x^i(C(t)) = x^i(t)$$

とする .

$$C'(t) = \frac{dx^i(C(t))}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

であるから

$$\nabla_{C'(t)} X = \sum_{k=1}^m \left(\frac{dX^k(t)}{dt} + \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(m,m)} \Gamma_{ij}^k X^i(t) \frac{dx^j(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{C(t)}$$

が成り立つ . これは接ベクトル場 X が曲線 $C(t)$ に沿って平行であるための必要十分条件はベクトル場 X の成分 $\{X^i\}$ が微分方程式

$$\frac{dX^k(t)}{dt} + \sum \Gamma_{ij}^k X^i(t) \frac{dx^j(t)}{dt} = 0$$

を満たすことを意味している .

この 1 階の斉次常微分方程式は初期条件

$$(X^1(0), \dots, X^m(0))$$

を与えればただ一つの解が存在することが知られているので , $T_{C(0)}$ に属する接ベクトルを与えれば , 曲線 $C(t)$ に沿った平行な接ベクトルが唯一つ決まることが分かる . このことは , 曲線 $C(t)$ に沿って平行なベクトル場全体のベクトル空間と接ベクトル空間 $T_{C(0)}M$ は同型であることを意味している . さらにこの同型によって , $C(t)$ 上の異なる 2 点 $C(t_1), C(t_2)$ における接ベクトル間の同型対応が定義できる . この対応 $P_{t_1}^{t_2}$

$$P_{t_1}^{t_2} : T_{C(t_1)}(M) \longrightarrow T_{C(t_2)}(M)$$

が多様体上のベクトルの平行移動です . この平行移動は接続 Γ_{ij}^k が与えられれば定義できることに注意しましょう .

この平行移動を用いてベクトルを定義に従って微分し , 共変微分と一致することを示しましょう . すなわち ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_h^0(X(C(h))) - X(C(0))}{h} = \nabla_{C'(0)} X \quad \dots (\#)$$

を示します .

$T_{C(0)}(M)$ の基底の一つを $\{e_1, \dots, e_m\}$ とし , 初期条件が e_i である , 曲

線 $C(t)$ 上の平行なベクトル場を $e_i(t)$ とする .

$$X(C(t)) = X^i(t)e_i(t)$$

とおくと , $\nabla_{C'(t)}e_i(t) = 0$ であるから ,

$$\nabla_{C'(t)}X(C(t)) = \frac{dX^i(t)}{dt}e_i(t)$$

である .

一方 ,

$$P_h^0(X(C(h))) = X^i(h)e_i(0)$$

であるから

$$\begin{aligned} & \frac{P_h^0(X(C(h))) - X(C(0))}{h} \\ &= \frac{X^i(h) - X^i(0)}{h}e_i(0) = \frac{dX^i(t)}{dt}e_i(0) \end{aligned}$$

したがって (#) が証明された .

ここまでは , リーマン計量は関係していない . 最後に曲線に沿った平行なベクトルは , ユークリッド空間における平行と似た性質があることを示そう .

$X(C(t)), Y(C(t))$ をともに曲線 $C(t)$ 上の平行なベクトル場とする . このとき

$$\frac{d \langle X(C(t)), Y(C(t)) \rangle}{dt} = \langle \nabla_{C'(t)}X(C(t)), Y(C(t)) \rangle + \langle X(C(t)), \nabla_{C'(t)}Y(C(t)) \rangle = 0$$

したがって , $\langle X(C(t)), Y(C(t)) \rangle$ は一定である . これは , ある曲線に沿って平行なベクトル場の大きさが一定であることを示している . さらに , 2つの平行なベクトルのなす角も一定である . すなわち , $T_{C(t_1)}(M)$ と $T_{C(t_2)}(M)$ の同型写像

$$P_{t_1}^{t_2} : T_{C(t_1)}(M) \longrightarrow T_{C(t_2)}(M)$$

はベクトル空間として同型だけでなく , 等長同型である .