

3. 曲面の法曲率

曲面の第2基本形式は曲面の各点における曲面が接平面から離れる量として定義された。

ここでは、曲面の曲がり方を調べる。曲面の曲がり方を曲面上の曲線の曲率を用いて表すことが本章の目的である。なお、この章の内容が曲面の曲率である全曲率（ガウス曲率）、平均曲率の土台である。

まず、用語の確認をしよう。

曲面 $\vec{f}(u, v)$ とは

$$\vec{f}(u, v) = \begin{pmatrix} f^1(u, v) \\ f^2(u, v) \\ f^3(u, v) \end{pmatrix}$$

のことで、 $\vec{f}(u, v)$ は u, v のベクトル値関数である、このように $\vec{f}(u, v)$ ベクトル表記するか、または $f(u, v)$ のように太字で表すべきなのであるが、ここでは $f(u, v)$ のように通常関数のように表記する。

偏微分は

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f_u, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = f_{uv}$$

と表す。すなわち、たとえば

$$f_{uv} = \begin{pmatrix} f_{uv}^1 \\ f_{uv}^2 \\ f_{uv}^3 \end{pmatrix}$$

のことである。

それでは、曲面上の点における曲面の曲がり方を調べるために用いる法曲率を説明します。

点 $P(f(u, v))$ を通る弧長変数の曲面上の曲線を

$$u = u(s), v = v(s)$$

とする。すなわち，曲線 C は

$$C : f(u(s), v(s))$$

と表される。

曲線 C 点 p における接ベクトル $\alpha(s)$ は

$$\alpha(s) = \frac{df}{ds} = f_u \frac{du}{ds} + f_v \frac{dv}{ds}$$

もちろん， s は弧長であるから， $|\alpha(s)| = 1$ である。

曲線 C の曲率ベクトルすなわち $\alpha'(s)$ と同じ向きの単位ベクトルを $\beta(s)$ ，
曲率を $k(s)$ とすれば

$$\begin{aligned} k(s)\beta(s) &= \frac{d\alpha(s)}{ds} = \frac{d\left(\frac{df}{ds}\right)}{ds} \\ &= \frac{d\left(f_u \frac{du}{ds} + f_v \frac{dv}{ds}\right)}{ds} \end{aligned}$$

$$= f_{uu} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2f_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + f_{vv} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + f_u \frac{d^2u}{ds^2} + f_v \frac{d^2v}{ds^2} \cdots (1)$$

(1) を眺めましょう。曲率ベクトル $\alpha'(s)$ は 2 次の導関数であるから，
 f_{uu} や $\frac{d^2u}{ds^2}$ が現れますが， f_{uu}, f_{uv}, f_{vv} は曲面固有の値です。

次に曲率ベクトル $\alpha'(s)$ の曲面の法線ベクトルへの正射影ベクトルを考え
ます。

点 P における曲面の単位法線ベクトルを \vec{n} とする。すなわち，

$$\vec{n} = \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$$

曲線の曲率ベクトル $k(s)\beta(s)$ の単位法線ベクトル \vec{n} への正射影ベクトル
を $k_n(s)\vec{n}$ とすると，

$$\begin{aligned} k_n(s) &= \frac{d\alpha(s)}{ds} \cdot \vec{n} \\ &= (f_{uu} \cdot \vec{n}) \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(f_{uv} \cdot \vec{n}) \left(\frac{du}{ds}\right) \left(\frac{dv}{ds}\right) + (f_{vv} \cdot \vec{n}) \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \\ &= L \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M \left(\frac{du}{ds}\right) \left(\frac{dv}{ds}\right) + N \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \cdots (2) \end{aligned}$$

ただし， L, M, N は第 2 基本形式の係数で

$$L = f_{uu} \cdot \vec{n}, M = f_{uv} \cdot \vec{n}, N = f_{vv} \cdot \vec{n}$$

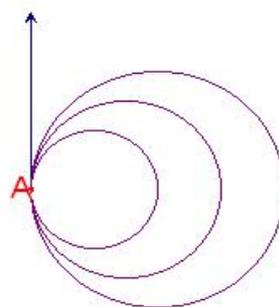
である。

ここで考えた，曲率ベクトルの法線ベクトルへの正射影ベクトル $k_n(s)\vec{n}$ を点 P の曲線 C の接ベクトルに対応する法曲率ベクトルといい，向きまで考えた法曲率ベクトル（法線ベクトルを逆向きにとると $-$ がつく）の大きさ $k_n(s)$ を点 P の曲線 C の接ベクトルに対応する法曲率という．曲率ベクトルと法線ベクトルのなす角を θ とすると，定義より

$$k_n(s) = k(s) \cos \theta$$

が成り立ちます．ここで， $k(s)$ は曲線の曲率．

(2) 式を見てみよう．点 P を通る曲線の点 P における曲率ベクトルの法線ベクトルへの正射影は，その曲線の単位接線ベクトル $(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds})$ および第2基本形式の係数 L, M, N できまるといことです．これは重要なことなのでしつこく説明すると，曲線の曲率は，右図が示すとおり（曲率は円の半径の逆数）接



ベクトルでは決まらない．しかし，その点を通る曲線の曲率の曲面の法線ベクトルへの正射影は，その点における単位接ベクトルだけで決まるということの意味しています．

すなわち，曲面の点 P における単位接ベクトルごとにその点の法曲率が対応しています．曲線を用いて説明しているが，法曲率は曲面固有の値であることを理解しましょう．

次に，法曲率を求めましょう．法曲率 $k_n(s)$ は上で計算した (2)

$$k_n(s) = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

です．通常以下のように変形します．

$$= \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{ds^2}$$

$$= \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

最後の式の分母は第1基本形式です．

この変形は少し説明が必要です．

$C : f(u(t), v(t))$ を弧長変数とは限らない一般の変数の曲線とし， s は弧

長を表します .

この曲線の単位接ベクトルは

$$\frac{df}{ds} = \alpha = (f_u u'(t) + f_v v'(t)) \frac{dt}{ds}$$

さらに弧長 s で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{ds^2} &= (f_{uu} u'(t)^2 + 2f_{uv} u'(t)v'(t) + f_{vv} v'(t)^2) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \\ &+ (f_u u''(t) + f_v v''(t)) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + (f_u u'(t) + f_v v'(t)) \frac{d^2 t}{ds^2} \end{aligned}$$

曲率ベクトルの法線ベクトル方向の成分は第 1 項だけに現れることに注意する .

また

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{ds^2} \cdot n &= (Lu'(t)^2 + 2Mu'(t)v'(t) + Nv'(t)^2) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \\ &= \frac{Lu'(t)^2 + 2Mu'(t)v'(t) + Nv'(t)^2}{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2} \end{aligned}$$

ここで $u'(t), v'(t)$ を新しく du, dv と表し

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \cdots (3)$$

となる .

(3) から分かるように , 法曲率は接方向 $du : dv$ で決まる値である .

曲面の主曲率 , 主方向は次の章で説明するが , ここでは漸近方向 , 漸近曲線の定義をする .

定義

曲面 $f(u, v)$ 上の点において , 法曲率が 0 である方向をその点における漸近方向という . また , 曲面 $f(u, v)$ 上の曲線が , その接ベクトルが各点で漸近方向のとき , その曲線を漸近曲線という .

与えられた点において $(du, dv) = f_u du + f_v dv$ が漸近方向のとき du, dv は

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0 \cdots (4)$$

を満たす。

したがって、漸近方向が存在する必要十分条件は

$$M^2 - LN \geq 0$$

である。

(4) は

$$L \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + 2M \left(\frac{du}{dv} \right) + N = 0$$

となるので、

$$M^2 - LN > 0 \text{ のとき} \\ \frac{du}{dv} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L} \cdots (5)$$

$$M^2 - LN = 0 \text{ のとき} \\ \frac{du}{dv} = -\frac{M}{L} \cdots (6)$$

である。

漸近曲線を求めるのはベクトル場が与えられたときの積分曲線、すなわち微分方程式 (5), (6) を解くことになる。

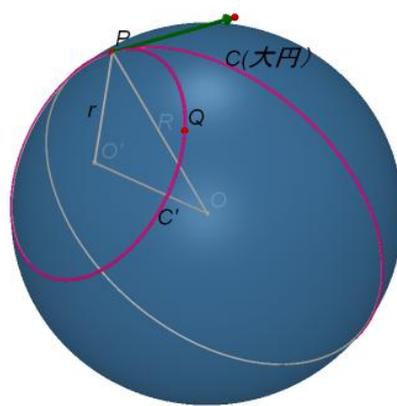
曲面上の曲線の法曲率とは、曲線の曲率ベクトルすなわち $k(s)\beta(s) = \frac{d\alpha(s)}{ds}$ の接平面の法線ベクトル \vec{n} への正射影であったから、法曲率を求めるには、曲線の曲率ベクトルが \vec{n} と平行である場合を考えればよい。したがって、次の曲線の曲率が曲面の法曲率である。

曲面 S 上の点 P における接ベクトルを $\vec{w} = af_u + bf_v$ とする。 \vec{n} と \vec{w} の決める平面を P における接ベクトル \vec{w} が定める直截(ちやくせつ)面という。曲面 S と直截面の交線として定まる曲線を点 P における接ベクトル

\vec{w} が定める直截線という．直截線は直截面上にあるから，曲率ベクトルは曲面の法線ベクトル \vec{n} と平行であり，直截線の曲率とその曲線の接線方向の法曲率は一致する．

球面で，曲率と法曲率の関係を確認してみよう．

右の球面上の2つの円 C, C' は共に点 P を通り，円 C は大円で， O, O' はそれぞれ円 C, C' の中心です．さらに，2つの円の点 P における接ベクトルの向きは一致しています．円 C の曲率ベクトルの向きは \vec{PO} で，曲線 C' の曲率ベクトルの向きは \vec{PO}' です．曲率の大きさは，曲率半径の逆数ですから， C, C' の半径をそれぞれ R, r とすれば円 C, C' の点 P



における曲率はそれぞれ $\frac{1}{R}, \frac{1}{r}$ となります．当然のことですが，曲面上の点 P を通る曲線について， P における接ベクトルが同じ向きだからといって曲率が同じであるわけではありません．しかし，曲率ベクトルの法線ベクトルへの正射影は一致するということが，今までの内容です．

この事実を上での例で確認にしましょう． \vec{PO} と \vec{PO}' のなす角を θ とします．まず， \vec{PO} が P における接平面の法線ベクトルですから， P を通る大円が緑色のベクトルの直截線です．球の中心 O から C' を含む平面に降ろした垂線の足は O' ですから，

$$R \cos \theta = r$$

したがって，

$$\frac{1}{r} \cos \theta = \frac{1}{R}$$

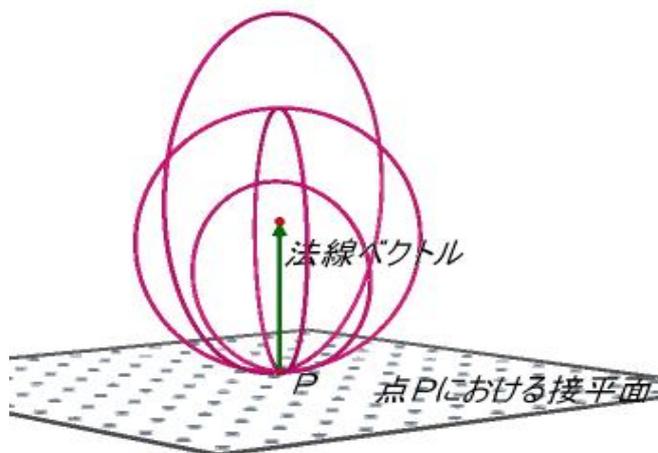
すなわち

$$(C' \text{ の点 } P \text{ における曲率}) \times \cos \theta = (C \text{ の点 } P \text{ における曲率})$$

$$=(\text{点 } P \text{ における与えられた接ベクトルの法曲率})$$

となり上で述べたことが確かめられました．

曲面上の点 P における法曲率が曲率である円を接平面に垂直にいくつかの方向で書いたものが右の図です．このような円をもっと書くことにより，曲面の点 P における曲がり具合を知ることができます．



さらに，地図の等高線でいうと，等高線の間隔が広いほど傾斜は緩やかです．傾斜を曲率に当てはめれば，傾斜が緩やかなほど，曲率半径はい大きくなります．そこで，上の図を発展させて，各方向の曲率半径（実際は曲率半径の平方根）を利用してその点の曲がり具合を等高線の形として表したのが後で学ぶデュパン（Dupin）の標線です．

例

双曲放物面

$$f(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$$

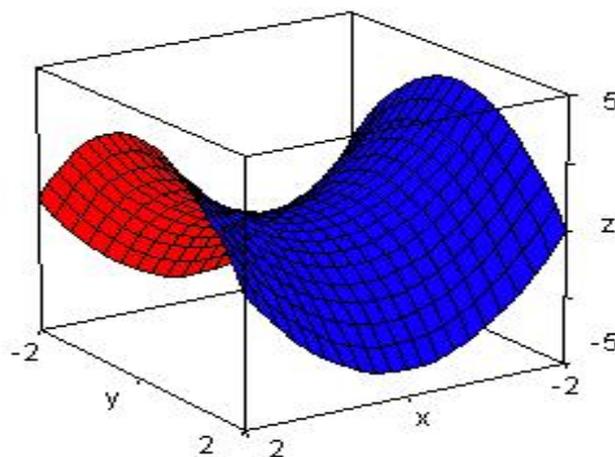
について法曲率を求めよう．

第1基本形式，第2基本形式が計算されれているのでそれを利用する．第1基本形式は

$$I = (1+4u^2)du^2 - 4uvdudv + (1+4v^2)dv^2$$

第2基本形式は

$$II = \frac{2(du^2 - dv^2)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$



したがって， $(0, 0)$ における (du, dv) 方向の法曲率 $k_n(du, dv)$ は

$$k_n(du, dv) = \frac{2(du^2 - dv^2)}{du^2 + dv^2}$$

です．微分幾何の習慣でこのように書きますが，よく見慣れた形で書く

と， $(0, 0)$ における $af_u + bf_v$ 方向の法曲率 $k_n(a, b)$ は

$$k_n(a, b) = \frac{2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$$

となります．

この双曲放物面は直線を含みます．実際 2 直線

$$(u, u, 0), (u, -u, 0)$$

はこの曲面上にあります．直線の曲率は 0 であるので，その方向の法曲率も 0 になります．実際，，

$$f_u(0, 0) = (1, 0, 0), f_v(0, 0) = (0, 1, 0)$$

より， $f_u(0, 0), f_v(0, 0)$ 方向の法曲率は 0 となります．当然この直線は漸近曲線です．

このように，曲面が直線を含むとき，その方向の法曲率は 0 になりますが，逆は成り立ちません．法曲率ベクトルが 0 とはその方向の曲率ベクトルが接平面の法線ベクトルと直交する，すなわち接平面上にあるという意味です．たとえば，トーラス面上の一番標高の高い点を結んだ円，標高の低い点を結んだ円の曲率ベクトルは接平面上にあり，その方向の法曲率は 0 となります．すなわち，この円は漸近曲線です．

