

6. リーマン多様体

6.1 リーマン計量

n 次元ベクトル空間 V 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とは次の2条件を満たす \mathbb{R} 上双線型写像

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

である.

(1) 対称性を持つ. すなわち

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \quad \forall u, v \in V$$

(2) 正值である. すなわち

$$\langle u, u \rangle \geq 0, \quad \forall u \in V. \text{ 等号が成り立つのは } u = 0 \text{ のときに限る.}$$

内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を指定したベクトル空間 V をユークリッド空間という. n 次元ユークリッド空間ではシュミットの直交化より正規直交基底を作ることができ, \mathbb{R}^n と同一視することができるからである. 当然ユークリッド空間では, 角や長さが求められる.

定義

M を微分多様体とする. g が M 上の滑らかな2階共変正值対称テンソル場であるとき, すなわち M の各点 P で $g(P)$ が $T_P(M)$ の正值対称テンソルのとき, g を M 上のリーマン計量という. リーマン計量が指定された多様体 M をリーマン多様体といい, (M, g) または簡単に M で表す.

微分多様体 M の許容座標系 $(U; x^i)$ を用いて g を表すと

$$g|_U = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

となる. ここで,

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \in C^\infty(U)$$

であり，対称性より $g_{ij} = g_{ji}$ が成り立つ．

なお，

$$g = g_{ij} dx^i dx^j$$

のように dx^i と dx^j の積の表示をすることがあるが，それは対称化作用素による

$$dx^i dx^j = \frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)$$

のことで， $g_{ij} = g_{ji}$ であるから $dx^i \otimes dx^j$ を $dx^i dx^j$ とおきかえても問題はない．

多様体 U の許容座標系 $(U; x^i)$ におけるリーマン計量は自由に定義することができる．実際， U 上の m^2 個の関数 $g_{ij} \in C^\infty$ が $g_{ij} = g_{ji}$ かつ行列 (g_{ij}) が各点で正値であればよい．しかし， M 全体でリーマン計量の条件を満たす 2 階共変テンソルが存在するかどうかを明らかではない．例えば，ベクトル場であれば，球面全体で 0 でないベクトル場は存在しない．

次の定理は微分多様体上に必ずリーマン計量が存在することを保証している．

定理

M が第 2 可算公理を満たす微分多様体なら， M 上のリーマン計量が必ず存在する．

証明

証明の方針は，有限交差性を持つ許容座標系上にリーマン計量を作り，それを単位の分割でつなげるという方法である．

M は第 2 可算公理を満たすから， M の有限交差性を持つ局所座標系の被覆を (U_α, x_α^i) とする．また，単位分割定理より，次の条件を満たす関数族 $\{f_\alpha\}$ が存在する．

$$(1) f_\alpha \in C^\infty(M)$$

$$(2) \text{supp}(f_\alpha) \subset U_\alpha$$

$$(3) 0 \leq f_\alpha \leq 1$$

$$(4) \sum_\alpha f_\alpha = 1$$

一方, 各局所近傍 U_α 上のリーマン計量を一つ取る. ここでは一番簡単な

$$g_\alpha = \sum_{i=1}^m dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^i$$

を取り, 局所座標近傍 U_α で対称 2 階共変テンソル g_α を

$$g_\alpha(P) = \begin{cases} f_\alpha(P)g^{(\alpha)}(P) & (P \in U_\alpha) \\ 0 & (P \notin U_\alpha) \end{cases}$$

で定義すれば

$$\text{supp} f_\alpha \subset U_\alpha$$

であり, U_α は有限交差性を持つから M 全体で定義された

$$g = \sum_\alpha g_\alpha$$

が求めるリーマン計量である.

証明から分かるように, M 上にはいろいろなリーマン計量が定義できそうである. 実際, 局所座標系上, 2 次正值リーマン計量をつくり, 単位の分割で継ぎ合わせればよい. しかし, 実際はそうではなく, M の位相の制約を受ける. 例えば球面 S^2 上の各点でガウス曲率 K が $K \equiv 0$ となるリーマン計量は存在しない. なぜなら

$$\int_{S^2} K dV = 0$$

となるがこの積分の値はガウス-ボンネの定理より 4π であるからである.

6.2 接ベクトルの共変微分

ベクトルの共変微分に入る.

まず \mathbb{R}^n におけるベクトル場の関数への作用を復習しよう.

$X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n), f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$(fX)(g) = f(X(g))$$

$$(X + Y)(f) = X(f) + Y(f)$$

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

を満たす．この性質を満たすベクトルのベクトル場への作用素として定義したのが共変微分である．

なお，ここで行う共変微分の定義は

立花俊一 リーマン幾何学 朝倉書店

に優れた解説がある．なお用語も同書に従った．

定義

M を微分多様体とする． M 上に写像

$$\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M), \quad (X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

を $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M), f, g \in C^\infty(M)$ に対して

$$(1) \quad \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$(2) \quad \nabla_X (fY + gZ) = (Xf)Y + f\nabla_X Y + (Xg)Z + g\nabla_X Z$$

を満たすようにを定めることを， M に疑似接続を与えるという．疑似接続が付加された微分多様体 (M, ∇) を疑似接続空間という．また， $\nabla_X Y$ を Y の X 方向の共変微分という．

この定義は多様体の許容座標系も用いない Intrinsic な定義であることに注意しよう．

次に

$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

は X については $C^\infty(M)$ 上線型写像である．しかし Y については \mathbb{R} 上線型写像であるが

$C^\infty(M)$ 上線型写像でないことに注意する必要がある．すなわち

$$\nabla; (X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

は $(1, 2)$ 型のテンソルではないが， $Y \in \mathcal{X}(M)$ を固定した

$$\mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M), \quad X \longmapsto \nabla_Y X$$

は $(1, 1)$ 型のテンソルである .

微分多様体 M 上に疑似接続を定義する方法は幾らでもあることに注意する .

実際許容座標系 $(U; x^i)$ を用いて

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

と定義する . ただし $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$ であれば何でもよい . この U 上の関数 Γ_{ij}^k を局所座標系 $(U; x^i)$ の座標ベクトル場 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ の接続係数と呼ぶ . ここで Γ_{ij}^k は i, j に関して対称である必要はない .

m^3 個の関数 Γ_{ij}^k を U 上定めれば , U 上における共変微分は自由にできるとに注意しよう . 実際 ,

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

のとき

$$\begin{aligned} \nabla_Y X &= \nabla_{Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} (X^i \frac{\partial}{\partial x^i}) \\ &= Y^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma_{kj}^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

となる . この式が共変微分 ∇ の許容座標 $(U; x^i)$ における表示式である .

次に , 2つの許容座標系 $(U; x^i), (V; y^p)$ が $U \cap V \neq \emptyset$ のとき , $(U; x^i)$ の接続係数 Γ_{ij}^k と $(V; y^p)$ の接続係数 $\bar{\Gamma}_{pq}^r$ の関係を調べよう .

∇ はテンソルではないので , 接続係数は規則的な変換をするわけではない . しかしその変換規則が分かれば , $(U; x^i)$ における接続係数を与えれば , $U \cap V \neq \emptyset$ のとき $(V; y^p)$ における変換係数を変換規則にしたがって定め , 微分多様体 M 全体で共変微分を定義することができる . その変換式を求めよう .

許容座標系 (V, y^p) における接続を係数を $\bar{\Gamma}_{pq}^r$ とする．すなわち，

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^q}} \frac{\partial}{\partial y^p} = \bar{\Gamma}_{pq}^r \frac{\partial}{\partial y^r}$$

このとき， $U \cap V$ において

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^p}$$

であるから，

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial^2 y^r}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} \bar{\Gamma}_{pq}^r \right) \frac{\partial}{\partial y^r}$$

一方

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial y^r}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^r}$$

であるから，

$$\Gamma_{ij}^k \frac{\partial y^r}{\partial x^k} = \bar{\Gamma}_{pq}^r \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 y^r}{\partial x^i \partial x^j} \quad \dots (\#)$$

が成り立つ．これが Γ_{ij}^k と $\bar{\Gamma}_{pq}^r$ の変換式である．変換式 (#) より， Γ_{ij}^k はテンソルの係数でないことが分かる．それは (#) の右辺の第 2 項があるからである．逆に考えれば，右辺の第 2 項がなくなればテンソルになる．すなわち， $\Gamma_{ij}^k - \bar{\Gamma}_{pq}^r$ が係数ならばテンソルである．それが次に考えるテンソルである．

次に，任意の $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対して

$$T_1(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

によって T_1 を定義しよう．このとき，

$$T_1(fX, Y) = f \nabla_X Y - (Yf)X - \nabla_Y X$$

であるから， T_1 はテンソルでない．さらにすでに調べたように $[X, Y]$ はベクトルであるが $[\cdot, \cdot]$ はテンソルでない．

それでは

$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

を

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

によって定義しよう．このとき，

$$T(X, Y) = -T(Y, X)$$

であり，

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX, Y] \\ &= f\nabla_X Y - Y(f)X - f\nabla_Y X - f[X, Y] + Y(f)X = fT(X, Y) \end{aligned}$$

より， T は $(1, 2)$ 型の交代テンソルである．テンソル T は疑似接続を与えれば決まるテンソルであり，テンソル T を疑似接続多様体 (M, ∇) の捩率テンソルという．

テンソル T の許容座標系 (U, x^i) における接続係数を求めよう．

$$\begin{aligned} T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= (\Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ij}^k) \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}$$

より，テンソル T は

$$T = (\Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ij}^k) \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \otimes dx^j$$

となる．

定義

捩率テンソル T が 0 テンソルである疑似接続を捩れ無しの接続または対称接続という．

捩率テンソルの許容座標系における接続係数より，

$$T = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

が分かる．すなわち， $T = 0$ は $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ の許容座標系を用いない Intrinsic な表現と見るべきである．

さらに，

$$T = 0 \Leftrightarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

である．すなわち

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

が成り立つことが捩じれ無しの接続の定義である。

6.3 テンソル場の共変微分

次にベクトル場に対する共変微分をテンソル場にまで拡張する。

テンソル場のベクトル場 X 方向の共変微分 ∇_X のルールは次の3条件である。

(1) ∇_X によりテンソルはテンソルにうつり、その型を変えない。すなわち、 T が (r, s) 型のテンソルなら $\nabla_X T$ も (r, s) 型のテンソルである。

(2) ∇_X はテンソル積に対して、微分の積の法則を満たす。すなわち、 T, S がともにテンソル場るとき

$$\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S$$

を満たす。

(3) ∇_X はテンソルの縮約 contr と交換可能である。すなわち T をテンソル場とすると

$$\nabla_X(\text{contr}(T)) = \text{contr}(\nabla_X T)$$

が成り立つ。

なお、テンソルの縮約についてはテンソル積の最後に述べてある。

まず、1次微分形式 $\alpha \in \Lambda^1(M)$ の共変微分 $\nabla_X \alpha$ を調べる。

$$\alpha(Y) = \text{contr}(Y \otimes \alpha) \in C^\infty(M)$$

に注意する。したがって、上記の性質 (3) より

$$\begin{aligned} \nabla_X(\alpha(Y)) &= \nabla_X(\text{contr}(Y \otimes \alpha)) \\ &= \text{contr}(\nabla_X Y \otimes \alpha) + \text{contr}(Y \otimes \nabla_X \alpha) \\ &= \alpha(\nabla_X Y) + (\nabla_X \alpha)(Y) \end{aligned}$$

$$\therefore \nabla_X \alpha(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y)$$

この式より、 $f \in C^\infty$ のとき

$$(\nabla_X \alpha)(fY) = f \nabla_X Y$$

が成り立つので、 $\nabla_X \alpha$ は $C^\infty(M)$ 上線型である。

$$\therefore \nabla_X \alpha \in \Lambda^1(M)$$

同様に，一般のテンソル場 T でも， $\nabla_X T$ がテンソル場になる事を確認しよう．

なお，微分幾何で扱われるテンソル場は (1, 2) 型または (1, 3) 型である．ここでは T は (1, 2) 型のテンソルとして議論する．

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M), \forall \alpha \in \wedge^1(M)$$

に対して，1次微分形式の共変微分と同様に

$$\begin{aligned} & \nabla_X T(\alpha, Y, Z) \\ &= X(T(\alpha, Y, Z)) - T(\nabla_X \alpha, Y, Z) - T(\alpha, \nabla_X Y, Z) - T(\alpha, Y, \nabla_X Z) \end{aligned}$$

である．この式より各変数に関して $C^\infty(M)$ 上線型であることが分かる．実際例えば Y に注目し， Y を fY に置き換えれば， $X(f)$ が相殺され Y に関して $C^\infty(M)$ 上線型が分かる．

したがって， $\nabla_X T$ は (1, 2) 型テンソルである．

以上でテンソル場 T の共変微分のルール (2), (3) より決まる共変微分 $\nabla_X T$ がテンソルになることが示せた．テンソル場 $\nabla_X T$ をテンソル場 T のベクトル場 X に沿った共変微分または共変微分導関数という．共変微分はユークリッド空間における偏微分のことである．

次に，微分多様体 M の許容座標系 $(U; x^i)$ を用いて，共変微分を表してみよう．許容座標系 $(U; x^i)$ の接続係数を $\{\Gamma_{ij}^k\}$ とする．すなわち

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

が成り立つ．

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

のとき，

$$\begin{aligned} & \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma_{kj}^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

ここで，

$$X_{,j}^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma_{kj}^i$$

とおき，

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} X = X^i_{;j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

である，これが，ユークリッド空間におけるベクトルの偏微分の式に対応するものである．

さらに

$$\nabla_Y X = Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} X = Y^j X^i_{;j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

となる．

次に，1次微分形式に対する共変微分の許容座標系による表示を計算しよう．

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i = a_k dx^k$$

とおく．

$$a_k = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)$$

$$= -dx^i \left(\Gamma^l_{kj} \frac{\partial}{\partial x^l} \right)$$

$$= -\Gamma^i_{kj}$$

$$\therefore \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i = -\Gamma^i_{kj} dx^k$$

である．

$\alpha \in \wedge^1(M)$ に対して

$$\alpha = a_i dx^i$$

とおくと

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} a_i dx^i =$$

$$= \frac{\partial a_i}{\partial x^j} dx^i - a_i \Gamma^i_{kj} dx^k$$

$$= \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} - a_k \Gamma^k_{ij} \right) dx^i$$

ここで

$$a_{i,j} = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - a^k \Gamma^k_{ij}$$

とおき

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \alpha = a_{i,j} dx^i$$

と表す．

次に，テンソル場の共変微分の許容座標系による表示を計算する．

ここでもテンソル場は $(1, 2)$ 型のテンソル場で計算する．

$$T = T_{kl}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k \otimes dx^l$$

とする．このとき，テンソル場の共変微分の性質 (2) より

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial}{\partial x^i} T &= \frac{\partial T_{kl}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k \otimes dx^l + T_{kl}^j (\Gamma_{ji}^n \frac{\partial}{\partial x^n}) \otimes dx^k \otimes dx^l + T_{kl}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes (-\Gamma_{ni}^k dx^n) \otimes \\ &dx^l + T_{kl}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k \otimes (-\Gamma_{ni}^l dx^n) \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k \otimes dx^l$ の項を集めて

$$= \left(\frac{\partial T_{kl}^j}{\partial x^i} + T_{kl}^t \Gamma_{ti}^j - T_{tl}^j \Gamma_{ki}^t - T_{kt}^j \Gamma_{li}^t \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k \otimes dx^l$$

となる．ここで

$$T_{kl,i}^j = \frac{\partial T_{kl}^j}{\partial x^i} + T_{kl}^t \Gamma_{ti}^j - T_{tl}^j \Gamma_{ki}^t - T_{kt}^j \Gamma_{li}^t$$

とおき

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} T = T_{kl,i}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k \otimes dx^l$$

と表す．

テンソル場の共変微分を見直してみよう．

T が $(1, 2)$ 型テンソル場するとき， $\nabla_X T$ は $(1, 2)$ 型のテンソルであるから，任意の $Y, Z \in \mathcal{X}(M), \alpha \in \wedge^1(M)$ に対して

$$\nabla_X T(\alpha, Y, Z)$$

はそれぞれの変数 α, Y, Z に関して C^∞ 上線型写像である．さらに X に関しても C^∞ 上線型写像である．したがって $(1, 2)$ 型テンソル T に対して ∇T を

$$\nabla T(\alpha, Y, Z, X) = \nabla_X T(\alpha, Y, Z)$$

によって定義すれば ∇T は $(1, 3)$ 型のテンソル場である．

$$\nabla(dx^j, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i}) = T_{kl,i}^j$$

であるから

$$\nabla T = T_{kl,i}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k \otimes dx^l \otimes dx^i$$

である．この作用素 ∇ はユークリッド空間における全微分に対応するものでこれからしばしば使われる．

リーマン計量テンソル $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ を思い出そう．任意のベクトル場 X, Y に対して内積 $\langle X, Y \rangle$ は

$$\langle X, Y \rangle = g(X, Y)$$

で定義し，

$$g(X, Y) = \text{contr}(g \otimes X \otimes Y)$$

すなわち， g, X, Y のテンソル積を X, Y について縮約したものである．

一方，ユークリッド空間における内積は

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \frac{\partial}{\partial x} \vec{v} \rangle \dots (\#)$$

を満たす．

リーマン計量テンソル g が $(\#)$ を満たす条件を求めよう．

$$\nabla_X(g(Y, Z)) = \nabla_X \text{contr}(g \otimes Y \otimes Z)$$

$$= \text{contr}((\nabla_X g) \otimes Y \otimes Z) + \text{contr}(g \otimes (\nabla_X Y) \otimes Z) + \text{contr}(g \otimes Y \otimes (\nabla_X Z))$$

$$= (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

したがって， $(\#)$ が成り立つのは任意の X に対して $\nabla_X g = 0$ すなわち $\nabla g = 0$ である．

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

のとき，

$$\nabla g = g_{ij,k} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k, \quad g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{tj} \Gamma_{ik}^t - g_{it} \Gamma_{jk}^t$$

である．すなわち $(\#)$ を満たすことは $\nabla g = 0$ すなわち任意の i, j, k で

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{tj} \Gamma_{ik}^t - g_{it} \Gamma_{jk}^t \equiv 0$$

が成り立つことである .

定義

(M, g) をリーマン多様体とする . M の疑似接続 ∇ が $\nabla g \equiv 0$ を満たすとき , 疑似接続 ∇ はリーマン計量 g を許容するという .

疑似接続にはもう一つ

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \equiv 0$$

を満たすとき , 挟まれ 0 または対称な疑似接続という . なおこの条件は任意の i, j, k で

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \equiv$$

と同値であった .

以上で , リーマン幾何の基本定理の準備が整った .

定理 (リーマン幾何の基本定理)

(M, g) をリーマン多様体とする . このとき M 上にリーマン計量 g を許容する , 対称な接続が唯一つ存在し , この接続をリーマン接続という .

証明

$X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対して $g(X, Y)$ を $\langle X, Y \rangle$ と表すことにする .

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \cdots (1)$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \cdots (2)$$

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \cdots (3)$$

(1)+(2)-(3) および対称性より $\langle \nabla_X Y, Z \rangle$ は $X, Y, Z, [X, Y], [Y, Z], [Z, X]$ の内積で表せる (∇_X を用いない式で表せる) . したがって , リーマン接続は唯一つ存在する .

証明の中の $\langle \nabla_X Y, Z \rangle$ を実際に計算する .

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y - [X, Y] \rangle$$

であるから ,

$$2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle = X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [Z, X], Y \rangle$$

である .

ここで ,

$$X = \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \frac{\partial}{\partial x^j}, Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$$

を代入する .

$$[X, Y] = 0, [Y, Z] = 0, [Z, X] = 0$$

であるから

$$2 \langle \Gamma_{ji}^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \rangle = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

$$2\Gamma_{ji}^l g_{lk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

$$\therefore \Gamma_{ji}^l = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

以後この接続係数が用いられる . なお , ここで用いた Γ_{ij}^k を求める方法は曲面論で Γ_{ij}^k を求めた方法と同じである .