

3. リーマン幾何の概略

ここではリーマン幾何を扱います。

リーマン幾何とは、高次元の幾何学という意味ではありません。図形を扱うのに、外部から眺めて扱うのではなく、図形上に住んでいる人の立場に立って調べるという研究方法のことです。

リーマン幾何の研究方法を説明する前に、曲面の研究方法を復習しましょう。

曲面 S が与えられれば、第 1 基本形式 $I = g_{ij} du^i du^j$ および第 2 基本形式 $II = h_{ij} du^i du^j$ が定まります。

ただし $1 \leq i, j \leq 2$, $g_{12} = g_{21}$, $h_{12} = h_{21}$. すなわち、曲面上に 6 つの関数 $\{g_{11}, g_{12}, g_{22}, h_{11}, h_{12}, h_{22}\}$ が決まります。

それでは逆に

ユークリッド平面 \mathbb{R}^2 上に 6 つの関数

$$\{g_{11}, g_{12}, g_{22}, h_{11}, h_{12}, h_{22}\}$$

を与えたとき、曲面 S で第 1 基本形式が $I = g_{ij} du^i du^j$ 第 2 基本形式 $II = h_{ij} du^i du^j$ である曲面が唯一つに決まるか

というのが曲面の基本定理です。この定理は正しく、偏微分方程式を利用して証明されます。

曲面を決めるとは 3 つの関数

$$\vec{f}(u, v) = \{f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v)\}$$

を求めることです。求める式が 3 つなのに与える関数が g_{ij}, h_{ij} の 6 つではバランスが悪い。当然偏微分方程式を解くには g_{ij}, h_{ij} に何かしらの条件が必要で、その条件がコダッチの方程式、ガウスの方程式です。

このように、第 1 基本形式、第 2 基本形式を与えれば曲面は完全に決まるわけですから、第 1 基本形式、第 2 基本形式に曲面の情報は全部入っていることとなります、すなわち曲面調べるためには、ユークリッド平面 \mathbb{R}^2 の各

点に 6 つの関数

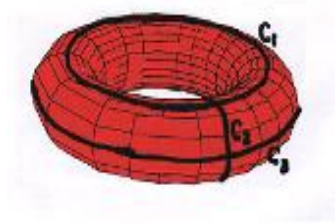
$$\{g_{11}, g_{12}, g_{22}, h_{11}, h_{12}, h_{22}\}$$

を与えたものを調べることと同じことです。

このように，第 1 基本形式，第 2 基本形式を与えれば曲面は完全に分かりますが，リーマン幾何とは第 1 基本形式 $\{g_{11}, g_{12}, g_{22}\}$ だけで曲面を調べようという研究方法です．このようにいうと，リーマン幾何は，第 1 基本形式，第 2 基本形式を用いた曲面の調べ方より大まかな調べ方だと思いかもしれませんがそれは正確ではありません．

例えばトーラス面で説明しましょう。

右図のトーラス面上の 3 つの円 C_1, C_2, C_3 について，外部から見ると円ですが，もし人間がトーラス面上で生活しているとすると，3 つの円は同じように感じるでしょうか．人間はトーラス面上を這って生活



していると考え，意識できるのは接平面だけで，接平面の上や下は意識できないすなわち存在しないとします． C_1 は円であるが， C_2, C_3 は直線と考えるでしょう．このように，曲面上で生活している人の立場たって曲面を調べる研究方法をリーマン幾何 (Intrinsic Geometry) というのです．

ガウスはユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内におかれた曲面上の曲線の曲率を次のように考えました．

\mathbb{R}^3 内の曲線として曲率ベクトルを求め，そのベクトルの接平面への正射影を曲面上の曲線の曲面上における曲率と考えました．この曲率を測地曲率といいます．

この考えにしたがって，上記のトーラス面上の 3 円の測地曲率を調べてみましょう．円の曲率ベクトルは円の中心を向きます，したがって， C_2, C_3 では接平面の法線ベクトルとなり，接平面への正射影すなわち測地曲率ベクトルは 0 ベクトルですが， C_1 の曲率ベクトルは接平面上のあるので，そのまま測地曲率ベクトルになります．したがって，測地曲率ベクトルは 0 ベクトル

ルではありません．曲面上の曲線で，各点で測地曲率ベクトルが 0 になるベクトルを測地線といいます．ところで，この測地ベクトルが意味があるのかが問題です．それは，測地線が局所的に最短の曲線を表すことから意味のあることが分かります．

話を進めましょう．

n 次元の立体 M を扱うわけですから，その立体の定義をする必要があります．3次元ユークリッド空間における2次元曲面は媒介変数表示で

$$\vec{f}(u, v) = (f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v))$$

と表示して曲面を調べました．

しかし，リーマン幾何の立場では M を外部から見るわけではないので， \mathbb{R}^n から高次元ユークリッドへの写像として立体 M を扱うわけにはいきません．そこで通常が多様体の定義になりました．いくつかの注意は本文で述べるとして先に進めましょう．

多様体 M 上での微分・積分の理論を構成するのが目的です．

M 上で定義された関数の微分には困難は伴いません．ところが， M で定義されたベクトル場 X を微分しようとするとき大きな困難が生じます．

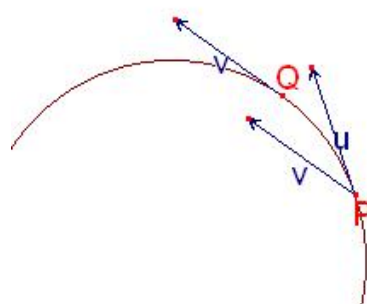
平面上の等速円運動 $r(s)$ の加速度を求めてみます．

$s, s + \Delta s$ における速度ベクトルを \vec{u}, \vec{v} とすると加速度ベクトルは

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{v} - \vec{u}}{\Delta s}$$

によって定義します．この結果は，ベクトルの成分ごとの微分になっています．

ここで，右図の点 P における \vec{u} と点 Q における \vec{v} の差は \vec{v} を平行移動して始点をそろえて計算します．多様体上での微分の定義の問題点はこの平行移動にあります．すなわち曲面 S 上の点 P と P に近い点 Q が与えられたとき， P におけるベクトルと Q におけるベ



クトルの差をどのように計算するか，言い方を変えれば点 P における接ベクトル空間 $T_P M$ と点 Q における接ベクトル空間 $T_Q M$ の対応を決める必要あります．

このように，多様体上で微分を行うとき，多様体の滑らかさだけでなく，各点の接ベクトル空間の関係が必要でその関係を接続といいます．

多様体の接続についての詳しい内容は本文で扱うとして，ここでは，ガウスが曲面を研究するのに曲面上のベクトル場の微分をどのように扱ったのかをのべ，それを手がかりに，どのように高次元に拡張したかを解説します．

ガウスは \mathbb{R}^3 における曲面を媒介変数表示して，すなわち曲面を

$$\vec{f}(u^1, u^2) = (f^1(u^1, u^2), f^2(u^1, u^2), f^3(u^1, u^2))$$

と表示して調べました．

\vec{f} の偏導関数 $\vec{f}_i, \vec{f}_{ij}, \vec{f}_{ijk}$ は

$$\vec{f}_i = \left(\frac{\partial f^1}{\partial u^i}, \frac{\partial f^2}{\partial u^i}, \frac{\partial f^3}{\partial u^i} \right)$$

$$\vec{f}_{ij} = \left(\frac{\partial^2 f^1}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial^2 f^2}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial^2 f^3}{\partial u^i \partial u^j} \right)$$

$$\vec{f}_{ijk} = \left(\frac{\partial^3 f^1}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}, \frac{\partial^3 f^2}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}, \frac{\partial^3 f^3}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} \right)$$

のことです．ベクトルの偏微分は x 成分， y 成分， z 成分を成分ごと微分することです．これはユークリッド空間における微分を曲面上で行っているだけです．

なおベクトル \vec{f}_i は通常は曲面上の $\frac{\partial}{\partial u^i}$ と書くベクトルのことです．

ガウスは曲面上のベクトルの微分を次のように考えるました．

曲面の単位法線ベクトルを \vec{n} とおくと，曲面 S 上の任意の点におけるベクトルは $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{n}\}$ で表せるので，任意の $1 \leq i, j \leq 2$ に対して

$$\vec{f}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \vec{f}_k + h_{ij} \vec{n} \cdots (1)$$

と表せる．

\vec{f}_{ij} はベクトル \vec{f}_i を \vec{f}_j 方向に \mathbb{R}^3 のベクトルとして微分したもので，一般に曲面 S の接ベクトルではない．

そこで、曲面上において、曲面上のベクトル \vec{f}_i を \vec{f}_j 方向に微分することを

\vec{f}_{ij} の接平面への正射影 $\Gamma_{ij}^k \vec{f}_k$ によって
 定め、 $\nabla_{\vec{f}_j} \vec{f}_i$ または $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^i}$
 と表す。

すなわち

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^i} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \quad \dots (\#)$$

このベクトルを \vec{f}_i の \vec{f}_j 方向への共変微分という。

すなわち、共変微分 $\nabla_{\vec{f}_j} \vec{f}_i$ は普通微分 (\mathbb{R}^3 のベクトルと見ての微分) $d \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i}$ の接平面への正射影のことである。

(#) を見ると $\{\Gamma_{ij}^k\}$ さえ定めれば曲面上のベクトルに対する微分が自由にできることになる。

$\{\Gamma_{ij}^k\}$ は自由であるあるから微分の方法は幾らでもある。そこで、曲面にあった $\{\Gamma_{ij}^k\}$ を唯一つ決める必要がある。その方法を曲面上でどのようにやったかすなわち $\{\Gamma_{ij}^k\}$ をどのように定めたかを見てみよう。

まず、 $f_{ij} = f_{ji}$ であるので、その正射影も当然等しい。したがって任意の i, j, k で

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

が成り立つ。

次に、

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right)$$

とおく。ただし、 (\quad, \quad) は内積である。

両辺を u^k で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} &= \left(\nabla_{u^k} \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \nabla_{u^k} \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \\ &= \left(\Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial u^l}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \Gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial u^m} \right) \\ &= \Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{jk}^m g_{im} \end{aligned}$$

この関係式より Γ_{ij}^k は第 1 基本量である g_{ij} だけで唯一つに決まり、

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial_{ij}}{\partial u^k} \right)$$

となる。詳しくは曲面の第 1 基本形式と第 2 基本形式の関係を参照。

すなわち、 Γ_{ij}^k を定めれば

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^i} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k}$$

が定義される。さらに、多様体上で定義された距離 g に対応する Γ_{ij}^k を定め多様体上のベクトルに対する微分としようという方法が広く用いられている。

実際、一般の多様体でも

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

と

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}} \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}} \frac{\partial}{\partial u^j} \right)$$

より、 Γ_{ij}^k がただ一つに決まることが分かる。

話を進めよう。ガウスは曲面の全曲率が第 1 基本量 g_{ij} だけで決まることを示した。 n 次元多様体においても、曲面の曲率に対応する概念を考えことになるが、ここではガウスはどのように曲率と第 1 基本量との関係を調べたかを振り返ってみよう。

曲面 $f(u, v) = (f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v))$ において

$$f_{ijk} = \left(\frac{\partial^3 f^1}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}, \frac{\partial^3 f^2}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}, \frac{\partial^3 f^3}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} \right)$$

において、

$$f_{ijk} = f_{ikj}$$

が成り立つことに注目した。この等式を詳しく見てみよう。

$$f_{ij} = \Gamma_{ij}^l f_l + h_{ij} n$$

である。なお、 h_{ij} は第 2 基本量 (第 2 基本形式の係数)、 n は曲面の単位法線ベクトルである。

普通微分 (R^3 のベクトルと考える成分ごとに微分) を d , 共変微分 (普通微分の曲面への正射影) を ∇ と表せば, $f_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$ のことであるから

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^i} = (f_{ij})^T = \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial u^l} \quad (T \text{ は正射影を表す})$$

したがって,

$$f_{ij} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^i} + h_{ij} n \cdots (1)$$

同様に

$$f_{ik} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}} \frac{\partial}{\partial u^i} + h_{ik} n \cdots (2)$$

ここで, $|n| = 1$ であるから

$$n \cdot n_k = 0$$

したがって, n_k は曲面の接ベクトルである.

$$f_{ijk} = f_{ikj} \cdots (3)$$

であるから, その正射影は等しい. したがって

$$(f_{ijk})^T = (f_{ikj})^T$$

である. 一方, (1),(2) をそれぞれ u^k, u^j で普通微分したものを曲面に接ベクトル空間に正射影したものは, (1),(2) それぞれ右辺の第 2 項を普通微分したものも関係している.

(3) を別の形で表すと

$$\begin{aligned} & \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^i} + (h_{ij} \text{ を含むベクトル}) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}} \frac{\partial}{\partial u^i} + (h_{ik} \text{ を含むベクトル}) \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} & \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^i} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\ &= (h_{ik} \text{ を含むベクトル}) - (h_{ij} \text{ を含むベクトル}) \end{aligned}$$

左辺は, 共変微分の順序を変えたときの差これは第 1 基本量だけの式で右辺は第 2 基本量 h_{ij} が現れます. このとき得られる等式のうち u_1, u_2 成分がガウスの方程式, n 成分がコダッチの方程式です. この 3 つの方程式が曲面の基本定理が解けるための可積分条件です. うまく言っているものなのです.

この事実すなわち g_{ij} と h_{ij} には関係があることはガウスは分かっていたでしょう。ガウスが驚いたのは、この差がガウス曲率で表せるということなのだと思えます。すなわちガウス曲率が第一基本量だけで表せることよりも、共変微分の順番を変えることの差がガウス曲率で表せることに驚いたのでしょう。言い換えれば、共変微分とは、曲面上における偏微分のことです。偏微分の順番を変えると異なるので、曲面上で偏微分をするには、偏微分の順番を変えたときの差を調べる必要があります。その差を実際計算すると非常に複雑な式であるが、なんとガウス曲率で簡単に表せるということです。このときにガウスは今まで考えていた曲面上の幾何の意味があることを確信したと思えます。さらにそこで、Riemann の講演すなわち、 n 次元多様体を自分の考えた幾何学の方法によって研究することを聞き、2度びっくり致しました。そのときに、ガウスはリーマン幾何の将来がはっきり見通せたと思えます。リーマンの講演を聞いてガウスがどぶに落ちたというのは作り話でしょうが、感激したことは容易に想像できます。

ガウスの曲面の幾何およびリーマンの研究方法が発表されれば、打てば響く数学者はたくさんおり、リーマン幾何が出来上がりました。リーマン幾何をつくりあげる過程において、偏微分の順番を変えることによる差をどのように扱うか。これは多様体上で微分をするときの基本になることで避けては通れません。これを数学者は多重線型写像の理論を利用して作り上げました。これがいわゆるテンソルという概念です。したがって、リーマン幾何を学ぶときはこのテンソルという概念を理解する必要があります。

ここでは、リーマン幾何の共変微分、曲率テンソル、断面曲率、Ricci テンソル、スカラー曲率等のリーマン幾何の土台である内容を曲面の微分幾何と関連つけて述べます。

これから本論に入る前に、曲面の微分幾何の
曲面の第 1 基本形式と第 2 基本形式の関係

をざっと読んでおくことをお勧めします。