

# リーマン多様体

リーマン幾何の原型はガウスの行った 3 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  における 2 次元曲面の内在幾何にあり，その内容を  $n$  次元に拡張したものです．

ガウスの行った内在幾何との関連でリーマン幾何の接続を説明しました．

リーマン幾何とは，高次元の幾何学という意味ではありません．図形を扱うのに，外部から眺めて扱うのではなく，図形上に住んでいる人の立場に立って調べるとい研究方法のことでです．

リーマン幾何の研究方法を説明する前に，微分幾何の曲面の研究方法を復習します．

曲面  $S$  が与えられれば，第 1 基本形式  $I = g_{ij}du^i du^j$  および第 2 基本形式  $II = h_{ij}du^i du^j$  が定まります．

ただし  $1 \leq i, j \leq 2$ ,  $g_{12} = g_{21}$ ,  $h_{12} = h_{21}$ .

すなわち，曲面上に 6 つの関数  $\{g_{11}, g_{12}, g_{22}, h_{11}, h_{12}, h_{22}\}$  が決まります．

それでは逆に

ユークリッド平面  $\mathbb{R}^2$  またはその開集合  $U$  上に 6 つの関数

$\{g_{11}, g_{12}, g_{22}, h_{11}, h_{12}, h_{22}\}$

を与えたとき，曲面  $S$  で第 1 基本形式が  $I = g_{ij}du^i du^j$ ，第 2 基本形式が  $II = h_{ij}du^i du^j$  である曲面が唯一つに決まるか

というのが曲面の基本定理です．この定理は正しく，偏微分方程式を利用して証明されます．

曲面を決めるとは 3 つの関数

$f(u, v) = \{f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v)\}$

を求めることです．求める式が 3 つなのに与える関数が  $g_{ij}, h_{ij}$  の 6 つではバランスが悪い．当然偏微分方程式を解くには  $g_{ij}, h_{ij}$  に何かしらの条件が必要で，その条件がコダッチの方程式，ガウスの方程式です．

このように，第 1 基本形式，第 2 基本形式を与えれば局所的にはですが曲

面は完全に決まるわけですから，第 1 基本形式，第 2 基本形式に曲面の局所的情報は全部入っていることになり，ですから，たとえば曲面の第 3 基本形式が第 1，2 基本形式で表せることは当たり前です．

曲面を調べるためには，ユークリッド平面  $\mathbb{R}^2$  またはその開集合  $U$  の各点に 6 つの関数

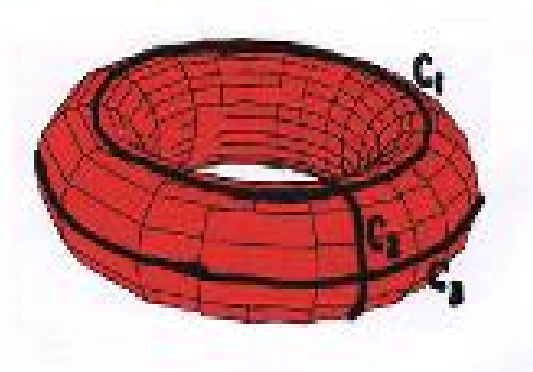
$$\{g_{11}, g_{12}, g_{22}, h_{11}, h_{12}, h_{22}\}$$

を与えたものを調べることと同じで，曲面のこの見方を抽象曲面といいます．

このように，第 1 基本形式，第 2 基本形式を与えれば局所的ですが曲面は完全に決まりますが，リーマン幾何とは第 1 基本形式  $\{g_{11}, g_{12}, g_{22}\}$  だけで曲面を調べようという研究方法です．このようにいうと，リーマン幾何は，第 1 基本形式，第 2 基本形式を用いた曲面の調べ方より大まかな調べ方だと思いかもしれませんがそれは正確ではありません．

例えばトーラス面で説明しましょう．

右図のトーラス面上の 3 つの円  $C_1, C_2, C_3$  について，外部から見ると円ですが，もし人間がトーラス面上で生活しているとすると，3 つの円は同じように感じるでしょうか．人間はトーラス面上を這って生活していると



考え，意識できるのは接平面だけで，接平面の上や下は意識できないすなわち存在しないとします． $C_1$  は円であるが， $C_2, C_3$  は直線と考えるでしょう．このように，曲面上で生活している人の立場たって曲面を調べる研究方法をリーマン幾何 (Intrinsic Geometry) といいます．

ガウスはユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内におかれた曲面上の曲線の曲率を次のように考えました．

$\mathbb{R}^3$  内の曲線として曲率ベクトル (弧長変数表示の加速度) を求め，その

ベクトルの接平面への正射影を曲面上の曲線の曲面上における曲率ベクトルと考えました．この曲率ベクトルを測地曲率ベクトルといいます．

この考えにしたがって，上記のトーラス面上の3円の測地曲率ベクトルを調べてみましょう．円の曲率ベクトルは円の中心を向きます，したがって， $C_2, C_3$  では接平面の法線ベクトルとなり，接平面への正射影すなわち測地曲率ベクトルは0ベクトルですが， $C_1$  の曲率ベクトルは接平面上にあるので，そのまま測地曲率ベクトルになります．したがって，測地曲率ベクトルは0ベクトルではありません．曲面上の曲線で，各点で測地曲率ベクトルが0になるベクトルを測地線といいます．測地線が局所的に最短距離を与えることは知られています．

話を進めましょう．

$n$ 次元の立体  $M$  を扱うわけですから，その立体の定義をする必要があります．3次元ユークリッド空間における2次元曲面は媒介変数表示で

$$f(u, v) = (f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v))$$

と表示して曲面を調べました．

しかし，リーマン幾何の立場では  $M$  を外部から見るわけではないので， $\mathbb{R}^n$  から高次元ユークリッドへの写像として立体  $M$  を扱うわけにはいきません．そこで通常の様体の定義になりました．ここでは，曲率  $k$  の球面すなわち半径  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  の2次元球面について通常の微分幾何とリーマン幾何(内在幾何)の違いを説明します．

原点を中心とする半径  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  の微分幾何での取り扱いは，緯度  $\theta$ ，経度  $\phi$  を用いて

$$x = \frac{1}{\sqrt{k}} \cos \theta \cos \phi, y = \frac{1}{\sqrt{k}} \cos \theta \sin \phi, z = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \theta$$

です．

内在幾何は  $\mathbb{R}^3$  の中で考える訳にはいけないので，次のように極射影を用

いるのが一般的です

原点を中心とする半径  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  の球面の、南極  $S(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{k}})$  から、北極  $N(0, 0, \frac{1}{\sqrt{k}})$  における球の接平面への極射影を考える。

すなわち、球面上の点  $P(x, y, z)$ 、北極  $N$  における接平面上の点を  $Q(u, v, \frac{1}{\sqrt{k}})$  とすると

$$\overrightarrow{SP} = t\overrightarrow{SQ}$$

より

$$(x, y, z + \frac{1}{\sqrt{k}}) = t(u, v, \frac{2}{\sqrt{k}})$$

したがって

$$x = tu, y = tv, z = \frac{-1 + 2t}{\sqrt{k}}$$

および

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{k}$$

より

$$t = \frac{4}{k(u^2 + v^2) + 4}$$

$$x = \frac{4u}{k(u^2 + v^2) + 4}, y = \frac{4v}{k(u^2 + v^2) + 4}, z = \frac{4 - k(u^2 + v^2)}{\sqrt{k}(4 + k(u^2 + v^2))}$$

を得る。

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

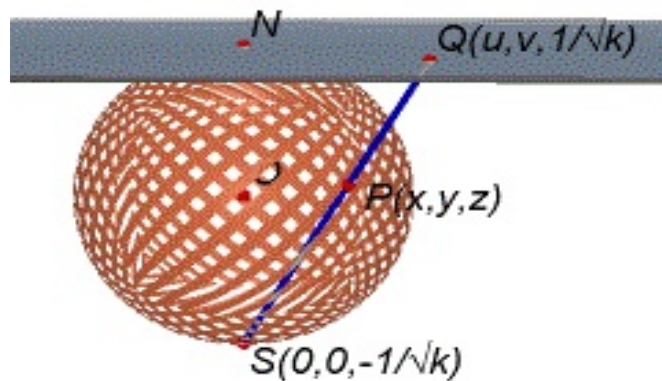
等及び

$$I = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

より、半径  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  の  $(u, v)$  における第1基本形式

$$I = \frac{16(du^2 + dv^2)}{(4 + k(u^2 + v^2))^2} \quad \dots (\#)$$

をえる。(手計算でも難しくはないが、右下式はパソコンでの結果)



(#) が標準的な曲率  $k$  の定曲率曲面の表示です。(#) を見ると  $\sqrt{k}$  がありません。ですから  $k$  が負すなわち負の定曲率曲面でもかまわないことに注目しましょう。

話を先に進めましょう。

多様体上での微分・積分の理論を構成するのが目的です。

多様体におけるベクトル場に対する微分を説明しますが、まず、通常微分すなわちユークリッド空間におけるベクトル場に対する微分がどのように行われかを調べ、そのままでは多様体に持ち込めないことを説明する。さらに、ガウスが共変微分をどのように定義して曲面を研究したかをのべ、それをどのように  $n$  次元に拡張するかの概略を述べる。

$$\begin{aligned} x &= 4u / (4 + k * (u^2 + v^2)); \\ y &= 4v / (4 + k * (u^2 + v^2)); \\ z &= (4 - k * (u^2 + v^2)) / (\text{Sqrt}[k] * (4 + k * (u^2 + v^2))); \\ dx &= D[x, u] * du + D[x, v] * dv; \\ dy &= D[y, u] * du + D[y, v] * dv; \\ dz &= D[z, u] * du + D[z, v] * dv; \\ \text{Simplify}[dx^2 + dy^2 + dz^2] & \\ &= \frac{16 (du^2 + dv^2)}{(4 + k (u^2 + v^2))^2} \end{aligned}$$

ユークリッド平面  $\mathbb{R}^2$  における曲線の速度 (接ベクトル), 加速度を求める。ユークリッド座標平面  $\mathbb{R}^2$  上を運動する点  $P$  の時刻  $t$  における座標  $(x, y)$  を

$$x = x(t), y = y(t)$$

とすると時刻  $t$  における速度は  $(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - (x(t), y(t))$

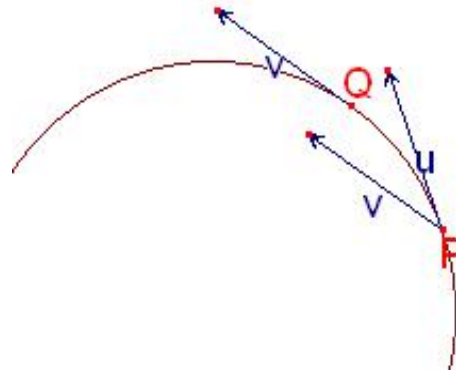
$$\begin{aligned} &= \left( \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) \\ &\rightarrow (x'(t), y'(t)) \quad (\Delta t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

である。2点間の差をベクトルで近似するが、これは多様体でも問題がない。

次に加速度を調べよう。

$$\begin{aligned} & \frac{(x'(t + \Delta t), y'(t + \Delta t)) - (x'(t), y'(t))}{\Delta t} \dots (*) \\ &= \left( \frac{x'(t + \Delta t) - x'(t)}{\Delta t}, \frac{y'(t + \Delta t) - y'(t)}{\Delta t} \right) \dots (**) \\ &\rightarrow (x''(t), y''(t)) \quad (\Delta t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

とするがこれはそのまま多様体に持ち込めない．それは (\*) から (\*\*) への変形するとき，ユークリッド平面では異なる始点のベクトルの差は片方を平行移動して始点をそろえて行うことができる，すなわち右図で



$$\begin{aligned} u &= (x'(t), y'(t)), \\ v &= (x'(t + \Delta t), y'(t + \Delta t)) \end{aligned}$$

であり， $v - u$  は  $v$  を平行移動し始点をそろえ計算している．

多様体では，異なる始点のベクトルの差をどのように計算するのが問題です．言い方を変えれば，2点  $P(x(t), y(t))$  と  $P(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$  の接ベクトル間をどのように同一視を与えるかが問題です．異なる2点間のベクトル空間に同一視を与えることを接続を与えるといいます．このように，多様体上で微分を行うとき，多様体の滑らかさだけでなく，各点の接ベクトル空間の関係である接続の概念が必要です．

なお，ベクトル空間間の接続を与えればベクトル場に対する微分が定義できるのですが，本稿では微分を定義してから，その微分に適合した接続が定義されるという流れで説明しています．

話を進めましょう．ここではユークリッド平面すなわちベクトルが平行移動できる場合を考えています．

速度を微分して加速度を求めています，曲線  $C : (x(t), y(t))$  上のベクトル場

$$X(t) = X(x(t), y(t)) = (f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t)))$$

に対しても微分  $X'(t)$  が定義できる． $X'(t)$  を計算すると

$$X'(t) = \left( \frac{df(x(t), y(t))}{dt}, \frac{dg(x(t), y(t))}{dt} \right)$$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t), \frac{\partial g}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y} y'(t) \right)$$

ここで，曲線  $P(x(t), y(t))$  の速度を  $Y(t) = Y(x(t), y(t))$ ，ただし

$$Y(t) = x'(t) \frac{\partial}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial}{\partial y}$$

とおくと

$$X'(t) = (Y(f), Y(g))$$

となる．

このことは，点  $P$  のおけるベクトル  $Y_P$  でベクトル場  $X$  を微分する，これをベクトル場  $X$  の点  $P$  における  $Y_P$  に沿った方向微分または普通微分といい  $d_{Y_P} X$  と表すと，

$X = (X^1, X^2)$  のとき

$$d_{Y_P} X = (Y_P(X^1), Y_P(X^2))$$

と成分ごとの微分である．

次に，ガウスが曲面を研究するのに曲面上のベクトル場の微分をどのように扱ったのかをのべ，それを手がかりに，どのように高次元に拡張したかを解説する．

ガウスは  $\mathbb{R}^3$  における曲面を媒介変数表示して，すなわち曲面を

$$f(u^1, u^2) = (f^1(u^1, u^2), f^2(u^1, u^2), f^3(u^1, u^2))$$

と表示して調べました．

$f$  の偏導関数  $f_i, f_{ij}, f_{ijk}$  は

$$f_i = \left( \frac{\partial f^1}{\partial u^i}, \frac{\partial f^2}{\partial u^i}, \frac{\partial f^3}{\partial u^i} \right)$$

$$f_{ij} = \left( \frac{\partial^2 f^1}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial^2 f^2}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial^2 f^3}{\partial u^i \partial u^j} \right)$$

$$f_{ijk} = \left( \frac{\partial^3 f^1}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}, \frac{\partial^3 f^2}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}, \frac{\partial^3 f^3}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} \right)$$

のことです．ベクトルの偏微分は  $x$  成分， $y$  成分， $z$  成分を成分ごと微分することです．これは曲面上の微分をユークリッド空間における微分と見て



いるだけです .

なおベクトル  $f_i$  は通常は曲面上の  $\frac{\partial}{\partial u^i}$  と書くベクトルのことで

$$f_{ij} = d \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i}$$

$$f_{ijk} = d \frac{\partial}{\partial u^k} \left( d \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i} \right)$$

です .

ガウスは曲面上のベクトルの微分を次のように考えるました .

曲面の単位法線ベクトルを  $n$  とおくと , 曲面  $S$  上の任意の点におけるベクトルは  $\{f_1, f_2, n\}$  で表せるので , 任意の  $1 \leq i, j \leq 2$  に対して

$$f_{ij} = \Gamma_{ji}^k f_k + h_{ij} n \cdots (1)$$

と表せる .

$f_{ij}$  はベクトル  $f_i$  を  $f_j$  方向に  $\mathbb{R}^3$  のベクトルとして微分したもので , 一般に曲面  $S$  の接ベクトルではない .

そこで , 曲面上において , 曲面上のベクトル  $f_i$  を  $f_j$  方向に微分することを

$f_{ij}$  の接平面への正射影  $\Gamma_{ji}^k f_k$  によって

$$\text{定め, } \nabla_{f_j} f_i \text{ または } \nabla \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i}$$

と表す .

すなわち

$$\nabla \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i} = \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \cdots (\#)$$

このベクトルを  $f_i$  の  $f_j$  方向への共変微分という .

接平面への正射影を  $(\cdot)^T$  と表せば

$$\nabla \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i} = \left( d \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i} \right)^T$$

である .

さらに , 座標系の基底だけでなく , 一般のベクトル場に対しても共変微分を次のよう定義した .

$\mathbb{R}^3$  内の曲面  $f$  上の点  $P$  における接ベクトル  $X_P$ , 曲面  $f$  上のベクトル場  $Y = (Y^1, Y^2, Y^3)$  に対して

$$\nabla_{X_P} Y = (d_{X_P} Y)^T = (X_P(Y^1), X_P(Y^2), X_P(Y^3))^T$$

と定義し、曲面  $f$  上のベクトル場  $X, Y$  に対して新しいベクトル場  $\nabla_X Y$  を

$$(\nabla_X Y)_P = \nabla_{X_P} Y$$

と定義した。  $\nabla_{X_P} Y$  をベクトル場  $Y$  の  $X_P$  方向の共変微分係数、  
  $\nabla_X Y$  をベクトル場  $Y$  の  $X$  方向の共変微分という。

共変微分について、曲面上のベクトル場  $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2$  および曲面上のなめらかな関数  $h$  について次の性質が成り立つことがわかる。

$$1. \nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$$

$$2. \nabla_X (hY) = X(h)Y + h\nabla_X Y$$

$$3. \nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$$

$$4. \nabla_{hX} Y = h\nabla_X Y$$

証明は難しくない。ここでは2の証明だけを行う。

各点  $P$  で

$$\nabla_{X_P} (hY) = X_P(h)Y_P + h(P)\nabla_{X_P} Y$$

を示せばよい。

$Y = (Y^1, Y^2, Y^3)$  とおく。

$$\nabla_{X_P} (hY) = (d_{X_P} (hY^1, hY^2, hY^3))^T$$

$$= (X_P(hY^1), X_P(hY^2), X_P(hY^3))^T$$

$$= (X_P h)(Y^1(P), Y^2(P), Y^3(P)) + h(P)(X_P Y^1, X_P Y^2, X_P Y^3)^T$$

$$= (X_P h)Y_P + h(P)\nabla_{X_P} Y$$

次に、 $\mathbb{R}^3$  における曲面  $S$  上の内積と  $S$  上の共変微分の関係調べよう、  
 曲面  $S$  上の内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は共に  $\mathbb{R}^3$  のベクトルとして内積をたったものである。

すなわち、 $X = (X^1, X^2, X^3), Y = (Y^1, Y^2, Y^3)$  のとき

$$\langle X, Y \rangle = X^1 Y^1 + X^2 Y^2 + X^3 Y^3$$

である .

曲面  $S$  上の 3 つのベクトル場  $X, Y, Z$  に対して

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

が成り立つ .

実際

$$\begin{aligned} \nabla_X \langle Y, Z \rangle &= d_X \langle Y, Z \rangle = \langle d_X Y, Z \rangle + \langle Y, d_X Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \end{aligned}$$

ここまで ,  $\mathbb{R}^3$  における曲面  $S$  の共変微分の性質を調べてきました . 共変微分の性質をまとめると次のようになります .

曲面  $S$  上のベクトル場  $X, Y$  に対してベクトル場  $Y$  の  $X$  方向の共変微分  $\nabla_X Y$  を

$$\nabla_X Y = (d_X Y)^T = (XY^1, XY^2, XY^3)^T$$

で定義した . ただし  $Y = (Y^1, Y^2, Y^3)$

共変微分  $\nabla_X Y$  について次の (A), (B) が成り立つ .

(A) 曲面  $S$  上のベクトル場  $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2$  および曲面上のなめらかな関数  $h$  について次の性質が成り立つ .

$$1. \nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$$

$$2. \nabla_X (hY) = X(h)Y + h\nabla_X Y$$

$$3. \nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$$

$$4. \nabla_{hX} Y = h\nabla_X Y$$

(B) 曲面  $S$  上の内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  とするとベクトル場  $X, Y, Z$  に対して

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

が成り立つ .

準備は整いました . これから  $n$  次元微分多様体  $M$  上の共変微分の説明を

します .

まず ,  $M$  を高次元のユークリッド空間  $\mathbb{R}^m$  に置かれた立体ということを用いることはできないことに注意する .

曲面  $S$  上の共変微分を定義し , 共変微分の満たす性質 (A), (B) を導き出しましたが , これを逆に考えます . 公理的になります , 多様体  $M$  上の性質 (A) を満たす演算を共変微分と定めます . すなわち

定義 (接続)

$M$  を  $n$  次元微分多様体 ,  $\mathfrak{X}(M)$  を  $M$  上のなめらかなベクトル場全体とする .

$M$  上に接続を定義するとは , 下に述べる 4 条件を満たす

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M); (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

を定義することである .

条件

$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \forall f \in C^\infty(M)$  に対して

1.  $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

2.  $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

3.  $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$

4.  $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$

$\nabla_X Y$  を  $Y$  の  $X$  方向の共変微分と呼ぶ .

多様体  $M$  に接続  $\nabla$  を定義するのは  $M$  の局所座標系  $\{U; u^1, \dots, u^n\}$  で

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k}$$

を定める  $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$  を定めればよい . 実際

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, Y = Y^j \frac{\partial}{\partial u^j}$$

のとき

$$\nabla_X Y = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \left( Y^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right)$$

$$= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k}$$

添字をそろえ

$$= X^i \left( \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} + Y^k \Gamma_{ik}^j \right) \frac{\partial}{\partial u^j}$$

である。  $\Gamma_{ij}^k$  を局所座標系  $\{U; u^1, \dots, u^n\}$  における接続係数と呼ぶ。

$\{\Gamma_{ij}^k\}$  は自由であるから接続の方法は幾らでもある。そこで、曲面にあった接続  $\{\Gamma_{ij}^k\}$  を唯一つ決める必要があるがその前に、 $\{\Gamma_{ij}^k\}$  の座標変換のときの関係式を調べよう。

$\nabla_X Y$  は各点でベクトルであるから、座標変換でしかるべき変換公式を満たさなければならない。それを調べよう。

局所座標系  $(U; x^i)$  の接続係数を  $\Gamma_{ij}^k$ 、局所座標系  $(V; y^p)$  の接続係数を  $\bar{\Gamma}_{ij}^k$  とする。

$U \cap V$  において

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^p}$$

である。

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} &= \nabla_{\frac{\partial y^p}{\partial x^i}} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^q} \\ &= \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^p}} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^q} \right) \\ &= \frac{\partial^2 y^q}{\partial x^j \partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^q} + \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} \bar{\Gamma}_{pq}^r \frac{\partial}{\partial y^r} \end{aligned}$$

添字をそろえて

$$= \left( \frac{\partial^2 y^r}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} \bar{\Gamma}_{pq}^r \right) \frac{\partial}{\partial y^r}$$

一方

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} &= \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \frac{\partial y^r}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^r} \end{aligned}$$

したがって、 $\Gamma_{ij}^k$  と  $\bar{\Gamma}_{pq}^r$  の関係式は

$$\frac{\partial y^r}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k = \frac{\partial^2 y^r}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} \bar{\Gamma}_{pq}^r \cdots (\#)$$

であることが分かる。

(#) から分かるように，共変微分

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M); (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

はテンソル場ではない．それは性質 2 である

$$2. \nabla_X (fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$$

より分かる．しかし性質

$$4. \nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$$

より分かるように， $Y$  を固定した

$$\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M); X \mapsto \nabla_X Y$$

は  $(1, 1)$  型のテンソルで，このテンソルを  $\nabla Y$  と表す．

多様体に局所座標系を与えれば，上記 (#) を満たすように接続係数を自由に定め共変微分を定義することができるが，多様体固有の接続がただ一つ定まるとありがたい．それを考える．

共変微分は  $\mathbb{R}^3$  における曲面  $S$  上の共変微分である  $(d_X Y)^T$  により  $\nabla_X Y$  を定義した． $(d_X Y)$  の性質を調べよう．

曲面  $S$  が

$$f = (f^1(u^1, u^2), f^2(u^1, u^2), f^3(u^1, u^2))$$

のとき

$$d_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = \left( \frac{\partial^2 f^1}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial^2 f^2}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial^2 f^3}{\partial u^i \partial u^j} \right)$$

であり，

$$\frac{\partial^2 f^k}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 f^k}{\partial u^j \partial u^i}$$

であるから

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^i}$$

ここで

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}^k$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = \Gamma_{ji}^k$$

であるから，任意の  $1 \leq i, j, k \leq n$  で

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \cdots (b)$$

が成り立つ．(b) を満たす接続を対称接続または捩れ 0 の接続という．

もう一つはすでにのべたべた

(B) 曲面  $S$  上の内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  とするとベクトル場  $X, Y, Z$  に対して

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \cdots (b)$$

が成り立つ．

である．(b) を満たす接続を計量  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を保つ接続という．

リーマン多様体  $(M, g)$  に固有の接続がただ一つ決まることは次の定理である．

定理 (リーマン幾何の基本定理)

リーマン多様体  $(M, g)$  上に対称な距離を保つ接続はただ一つ存在する．

リーマン幾何の基本定理の証明の前に，対称テンソルすなわち

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

を局所座標を用いないテンソル場で表そう．

ちなみにできるだけ局所座標を用いないでテンソル場で条件を表すのがリーマン幾何の基本的考えです．リーマン幾何の理解にはテンソルの知識が必要であることが納得できると思う．なお，リーマン幾何で特に用いるテンソル場は，計量テンソル場，これからでてくる捩率テンソル場および曲率テンソル場である．

ここテンソルの復習をしておこう．詳しくはしかるべき書を読むとして，概略だけ説明する．

2つの実数体上のベクトル空間  $V, W$  が与えられたとき， $v \in V, w \in W$  に対して， $v, w$  の積  $v \otimes w$  を次の2条件

1.  $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w, (av) \otimes x = a(v \otimes w)$
2.  $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2, v \otimes (aw) = a(v \otimes w)$

ただし,  $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W, a \in \mathbb{R}$   
 を満たすように定めたものです .

ここで, 集合  $\{v \otimes w | v \in V, w \in W\}$  ではベクトル空間にならないので,  $v \otimes w, v \in V, w \in W$  の生成したベクトル空間を  $V, W$  のテンソル積といい  $V \otimes W$  と表す .

この定義では, いろいろなテンソルの定義ができそうです . しかし  
 どのように定義しても互いに同型になる

が証明されます . これをテンソル積の普遍性といいます . テンソルを学ぶ  
 と最初にこの普遍性の定理の証明があり, 躓きそうになりますがとても大事  
 であることが分かります .

テンソル積はどのように定義しても同型であるから一つ作ればよくそれは,  
 双線型写像

$$V^* \times W^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

を全体であり  $L(V^*, W^*; \mathbb{R})$  と表す . すなわち

$$V \otimes W \cong L(V^*, W^*; \mathbb{R})$$

である .

もう一つテンソルで学ばなければならないことがあります . それはベクトル  
 空間の基底を用いた定義です .

この説明のためにまず, ベクトルの基底による定義を復習しましょう .

ベクトル空間は抽象的な概念で, 基底を用いて初めてベクトル空間  $V$  の  
 要素が扱えます . すなわち, 基底  $\{e_i\}$  を用いて

$$V \ni v = v^i e_i$$

より成分表示  $v = (v_1, \dots, v^n)$  となります .

逆に, ベクトル空間  $V$  の要素は基底を与えたとき, 定まる  $n$  個の実数の  
 組で, 基底の変換で次の条件を満たす .

基底  $\{e_i\}$  のとき定める  $n$  個の実数の組  $\{v^i\}$ , および基底  $\{\bar{e}_i\}$  のとき決



まる  $n$  個の実数の組  $\bar{v}^i$  が基底の関係が

$$\bar{e}_i = a_i^j e_j$$

のとき,

$$v^i = a_j^i \bar{v}^j$$

を満たす.

この条件を満たすとき,  $V$  の要素が矛盾なく定義できる. 実際

$$v^i e_i = a_j^i \bar{v}^j e_i = \bar{v}^j \bar{e}_j$$

これが基底に基づいたベクトルの定義です.

ベクトルをこのように学んでいけば, 添字が複数や多数の場合も考えるのが自然であり

ベクトル空間  $V$  の基底  $\{e_i\}$  を定めるとき  $n^2$  個の実数が決まりそれを  $v^{ij}$  とする. また別の基底  $\{f_1, \dots, f_n\}$  を定めると  $n^2$  個の実数は  $w^{ij}$  である. 2つの基底  $\{e_1, \dots, e_n\}, \{f_1, \dots, f_n\}$  の関係が

$$f_i = e_j a_i^j$$

のとき  $\{v^{ij}\}, \{w^{pq}\}$  が

$$a_p^i a_q^j w^{pq} = v^{ij}$$

を満たすとき  $\{v^{ij}\}$  を  $V$  上の 2 階の反変テンソルまたは  $V$  上の  $(2, 0)$  型のテンソルといいます.

これがテンソルの基本です. 添字が 3 つ以上も当然考えます. もう一つ注意することは, ベクトル空間  $V$  に対してその双対空間  $V^*$  をあるのでテンソルの定義は次のようになる.

(2, 3) 型のテンソルで説明する.

$V$  上の (2, 3) 型のテンソル (2 階反変, 3 階共変テンソル) とは  $V$  の基底を  $\{e_i\}$  を定めれば決まる  $n^5$  個の実数  $\{T_{klm}^{ij}\}$  で  $V$  の別の基底  $\{f_i\}$  で表したとき  $\{\bar{T}_{rst}^{pq}\}$  とする. このとき, 2つの基底間に

$f_i = e_j a_i^j$  の関係がある時

$$a_p^i a_q^j \bar{T}_{rst}^{pq} = a_r^k a_s^l a_t^m T_{klm}^{ij}$$

を満たすものである.

話を戻しましょう．対称性を示すテンソル場を定義します．

定義 (捩率テンソル)

$\nabla$  を多様体  $M$  の接続とする．写像

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M); (X, Y) \mapsto T(X, Y)$$

を

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

で定義する．この  $T$  を捩率テンソル場という．

まず． $T$  がテンソル場であることを示そう．

$$T(X, Y) = -T(Y, X)$$

であるから，

$$T(X_1 + X_2, Y) = T(X_1, Y) + T(X_2, Y) \cdots (1)$$

および  $f \in C^\infty(M)$  に対して

$$T(fX, Y) = fT(X, Y) \cdots (2)$$

を示せばよい．

(1) は容易であるので，(2) を証明する．

$$[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X \cdots (*)$$

に注意する．

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX, Y] \\ &= f\nabla_X Y - Y(f)X - f\nabla_Y X - f[X, Y] + Y(f)X \\ &= fT(X, Y) \end{aligned}$$

注意

任意の  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  に対して

$$T_1(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

で定まる  $T_1$  はテンソル場でない．実際

$$T_1(fX, Y) = f\nabla_X Y - (Yf)X - \nabla_Y X$$

である．また  $[X, Y]$  はベクトルであるが上記 (\*) より分かるように  $[\cdot, \cdot]$  はテンソル場でない．

次に， $M$  の局所座標系  $(U, x^i)$  で捩率テンソルを表そう．

$$\begin{aligned} T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}$$

したがって，捩率テンソル  $T$  の成分表示は

$$T = T_{ij}^k dx^i \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$$

である．この成分表示より次のことが分かる．

$$T \equiv 0 \Leftrightarrow \text{接続 } \nabla \text{ は対称接続}$$

準備が整いました．リーマン幾何の基本定理の証明をする．

証明

$\langle \nabla_X Y, Z \rangle$  を内積および交換子積  $[\cdot, \cdot]$  で表す．それは次のようにすればよい．

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle$$

$$-Z \langle X, Y \rangle = -\langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle$$

辺々加えて捩率テンソルが 0 より

$$2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle = X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle$$

$$+ \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle$$

$$+ \langle Z, X, Y \rangle \cdots (\#)$$

を得る． $X, Y, Z$  は任意であるから， $\nabla_X Y$  はただ一つに決まる．

(\#) で定義した  $\nabla_X Y$  が接続の条件を満たすことを示せばよい．

$f \in C^\infty(M)$  のとき

$2 \langle \nabla_{fX} Y, Z \rangle$  を計算する．

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X, [Z, fX] = Z(f)X - f[Z, X]$$

に注意すれば

$$\begin{aligned} & 2 \langle \nabla_{fX} Y, Z \rangle \\ &= fX \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, fX \rangle - Z \langle fX, Y \rangle - \langle [fX, Y], Z \rangle \\ &- f \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, fX], Y \rangle \\ &= f(X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle) \\ &= 2 \langle f \nabla_X Y, Z \rangle \end{aligned}$$

他も同様に示すことができるので接続である。したがって、リーマン多様体に対称な距離を保つ接続がただ一つ存在することが証明された。

リーマン多様体  $(M, g)$  の対称な距離を保つただ一つの接続すなわち上記 (#) で定まる接続をリーマン接続または Levi-Civita 接続と呼ぶ。

なお (#) から分かるように、リーマン接続はリーマン計量  $g$  だけで決まる。

次に、距離を保つ接続の条件である

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

をテンソルの言葉で書き直そう。そのためにはテンソル場の共変微分が必要なので、その復習から始める。

すでに、ベクトル場に対する共変微分は説明したが、テンソル場に対する共変微分も定義される。

例

多様体  $M$  上のなめらかなベクトル場全体を  $\mathfrak{X}(M)$ 、1 次の微分形式全体 (一階共変ベクトル場) を  $\mathfrak{X}(M)$  で表す。また  $C(R)$  でテンソル  $R$  の縮約を表す。本来は反変成分の  $t$  番目と共変成分の  $t$  番目の縮約なら  $C_s^t(R)$  のように表すべきであるが、ここでは混乱がないので、 $C(R)$  とする。

$$Y \in \mathfrak{X}(M), \alpha \in \mathfrak{X}(M)$$

のとき、自然な演算  $\alpha(Y)$  は

$$\alpha(Y) = C(\alpha \otimes Y)$$

であることに注意する .

$\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$  に対して

$$\nabla_X(\alpha(Y)) = C((\nabla_X\alpha) \otimes Y + \alpha \otimes (\nabla_X Y)) \cdots (\#)$$

が自然であろう .

(#) を書き直すと

$$\nabla_X C(\alpha \otimes Y) = C(\nabla_X(\alpha \otimes Y)) = C((\nabla_X\alpha) \otimes Y + \alpha \otimes (\nabla_X Y))$$

となる .

この例より , テンソル場に対する共変微分の次の定義が自然であることが分かる .

定義 (テンソル場の共変微分)

多様体  $M$  上のテンソル場に対する共変微分  $\nabla_X$  は次の条件を満たす .

1. テンソル場  $R$  が  $(r, s)$  型なら  $\nabla_X R$  は  $(r, s)$  型である . すなわち  $\nabla_X$  はテンソルの型を変えない .

2.  $\nabla_X$  はテンソル積に対してライプニッツの法則を満たす . すなわち ,  $R, S$  がテンソル場するとき

$$\nabla_X(R \otimes S) = (\nabla_X R) \otimes S + R \otimes (\nabla_X S)$$

が成り立つ .

3.  $\nabla_X$  は縮約と交換可能である . すなわち

$$\nabla_X C(R) = C(\nabla_X R)$$

成り立つ .

ここで , たとえば  $R$  が  $(2, 2)$  型テンソルのとき  $X, Y \in \mathfrak{X}(M), \alpha, \beta \in \mathfrak{X}(M)$  に対して

$$R(X, Y, \alpha, \beta) = C(R \otimes X \otimes Y \otimes \alpha \otimes \beta)$$

であることに注意する .

テンソル場の共変微分を計算しよう .

リーマン多様体  $(M, g)$  の局所座標系  $(U; x^i)$  で考える .

まず 1 次の微分形式 ( 1 階共変ベクトル場 ) の共変微分を計算する .

$$\nabla_X(\alpha(Y)) = (\nabla_X\alpha)(Y) + \alpha(\nabla_X Y)$$

であるから

$\alpha = \alpha_i dx^i \in \mathfrak{A}(M)$  のとき

$$\begin{aligned} & (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \alpha) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \alpha_k \Gamma_{ij}^k \\ &= \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \alpha_k \Gamma_{ij}^k \end{aligned}$$

したがって

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \alpha = \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \alpha_k \Gamma_{ij}^k \right) dx^j$$

である .

さらに ,  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  と置けば

$$\begin{aligned} \nabla_X \alpha &= X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \alpha \\ &= X^i \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \alpha_k \Gamma_{ij}^k \right) dx^j \end{aligned}$$

であり , 特に

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^k = -\Gamma_{ij}^k dx^j$$

である .

反変ベクトル場 , 共変ベクトル場の共変微分の大事な公式であるのでま

めておくと

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^j = -\Gamma_{ik}^j dx^k \end{cases}$$

である . なお  $\Gamma_{ij}^k$  の  $i, j$  の順番は書物によって異なるのに注意 . ただし多

くは対称接続を扱うので大きな問題はない .

次に一般のテンソル場の共変微分の成分表示を計算する .

ここでは  $(2, 2)$  型のテンソル  $R$  で計算する .

$$\nabla_X(R(Y, Z, \alpha, \beta))$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_X(C(R \otimes Y \otimes Z \otimes \alpha \otimes \beta)) \\
&= C((\nabla_X R) \otimes Y \otimes Z \otimes \alpha \otimes \beta + R \otimes \nabla_X Y \otimes Z \otimes \alpha \otimes \beta \\
&+ R \otimes Y \otimes \nabla_X Z \otimes \alpha \otimes \beta + R \otimes Y \otimes Z \otimes \nabla_X \alpha \otimes \beta \\
&+ R \otimes Y \otimes Z \otimes \alpha \otimes \nabla_X \beta) \\
&= (\nabla_X R)(Y, Z, \alpha, \beta) + R(\nabla_X Y, Z, \alpha, \beta) + R(Y, \nabla_X Z, \alpha, \beta) \\
&+ R(Y, Z, \nabla_X \alpha, \beta) + R(Y, Z, \alpha, \nabla_X \beta)
\end{aligned}$$

である。これが、テンソル場の共変微分の基本となる式である。

$$R = R_{kl}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k \otimes dx^l$$

とする。

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^t}} R = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^t}} R)_{kl}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k \otimes dx^l$$

ここで

$$\begin{aligned}
&(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^t}} R)_{kl}^{ij} \\
&= (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^t}} R)(dx^i, dx^j, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}) \\
&= \frac{\partial R_{kl}^{ij}}{\partial x^t} - R(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^t}} dx^i, dx^j, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}) - R(dx^i, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^t}} dx^j, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}) - \\
&R(dx^i, dx^j, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^t}} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}) - R(dx^i, dx^j, \frac{\partial}{\partial x^k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^t}} \frac{\partial}{\partial x^l}) \\
&= \frac{\partial R_{kl}^{ij}}{\partial x^t} + \Gamma_{ts}^i R_{kl}^{sj} + \Gamma_{ts}^j R_{kl}^{is} - \Gamma_{tk}^s R_{sl}^{ij} - \Gamma_{tl}^s R_{ks}^{ij}
\end{aligned}$$

ここで、 $\nabla_X R$ において  $f \in C^\infty(M)$  に対して

$$\nabla_{fX} R = f \nabla_X R$$

を満たすから  $X$  はテンソル場の性質を持つ。したがって  $\nabla R$  を

$$\nabla R : \mathfrak{A}(M) \times \mathfrak{A}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R};$$

$$(X, Y, Z, \alpha, \beta) \mapsto \nabla_X(Y, Z, \alpha, \beta)$$

で定義すると (2, 3) 型のテンソルである。

通常、テンソル  $\nabla R$  をテンソル  $R$  の共変微分といい、 $\nabla_X R$  を  $R$  の  $X$  方向の共変微分商または共変微分係数という。

$\nabla R$  を成分表示すると

$$\nabla R = \left( \frac{\partial R_{kl}^{ij}}{\partial x^t} + \Gamma_{ts}^i R_{kl}^{sj} + \Gamma_{ts}^j R_{kl}^{is} - \Gamma_{tk}^s R_{sl}^{ij} - \Gamma_{tl}^s R_{ks}^{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k \otimes dx^l$$

$$dx^l \otimes dx^t$$

である .

準備が整いました . ここで距離を保つ接続である

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

をテンソルの言葉で書き直そう .

ここで内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は計量テンソル  $g$  を用いて

$$\langle Y, Z \rangle = g(Y, Z)$$

と表記するものである .

接続が距離を保つは

$$\nabla_X (g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

となる .

左辺は

$$(\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

である . したがって ,

接続  $\nabla$  が距離  $g$  を保つ

$\iff$

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) \text{ に対して } (\nabla_X g)(Y, Z) = 0$$

$$\iff \nabla g \equiv 0$$

となる .

以上の議論の上でリーマンの基本定理を書き直すと次のようになる . ちなみにこれが標準的な表し方です .

定理 (リーマン幾何の基本定理)

リーマン多様体  $(M, g)$  上に

$$T \equiv 0, \nabla g \equiv 0$$

をみたす接続  $\nabla$  はただ一つ存在する .



内容が前後するが，最後に多様体上の計量テンソル場を説明し，この章を終わりにする．

まずベクトル空間  $V$  上の内積を定義する．

定義（ベクトル空間の内積）

$n$  次元ベクトル空間  $V$  上の内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  とは次の 2 条件を満たす  $\mathbb{R}$  上双線型写像

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

である．

(1) 対称性を持つ．すなわち

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \quad \forall u, v \in V$$

(2) 正値である．すなわち

$$\langle u, u \rangle \geq 0, \quad \forall u \in V. \text{ 等号が成り立つのは } u = 0 \text{ のときに限る.}$$

内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を指定したベクトル空間  $V$  をユークリッド空間という．内積が定義できればシュミットの直交化より正規直交基底を作ることができ， $\mathbb{R}^n$  と同一視することができるからである．当然ユークリッド空間では，角や長さが求められる．

ベクトル空間に内積を定義するとは，ベクトル空間  $V$  上の 2 階共変正値対称テンソル  $g$

$$g(u, v) = \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in V$$

を定義することである．

定義（計量テンソル場）

$M$  を微分多様体とする． $g$  が  $M$  上の滑らかな 2 階共変正値対称テンソル場であるとき，すなわち  $M$  の各点  $P$  で  $g(P)$  が  $T_P(M)$  の 2 階共変正値対

称テンソルのとき,  $g$  を  $M$  上のリーマン計量または基本テンソル場という. リーマン計量が指定された多様体  $M$  をリーマン多様体といい,  $(M, g)$  または簡単に  $M$  で表す.

微分多様体  $M$  の許容座標系  $(U; x^i)$  を用いて  $g$  を表すと

$$g|_U = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

となる. ここで,

$$g_{ij} = g \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \in C^\infty(U)$$

であり, 対称性より  $g_{ij} = g_{ji}$  が成り立つ.

なお,

$$g = g_{ij} dx^i dx^j$$

のように  $dx^i$  と  $dx^j$  の積の表示をすることがあるが, それは対称化作用素による

$$dx^i dx^j = \frac{1}{2} (dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)$$

のことで,  $g_{ij} = g_{ji}$  であるから  $dx^i \otimes dx^j$  を  $dx^i dx^j$  とおきかえても問題はない.

多様体  $U$  の許容座標系  $(U; x^i)$  におけるリーマン計量は自由に定義することができる. 実際,  $U$  上の  $m^2$  個の関数  $g_{ij} \in C^\infty$  が  $g_{ij} = g_{ji}$  かつ行列  $(g_{ij})$  が各点で正値であればよい. しかし,  $M$  全体でリーマン計量の条件を満たす 2 階共変正値対称テンソル場が存在するかどうかを明らかではない. 例えば, ベクトル場でいえば, 球面全体で 0 でないベクトル場は存在しない.

次の定理は微分多様体上に必ずリーマン計量が存在することを保証している.

定理

$M$  が第 2 可算公理を満たす微分多様体なら,  $M$  上のリーマン計量が必ず存在する.

証明

証明の方針は, 有限交差性を持つ許容座標系上にリーマン計量を作り, そ

れを単位の分割でつなげるという方法である．

$M$  は第 2 可算公理を満たすから， $M$  の有限交差性を持つ局所座標系の被覆を  $(U_\alpha, x_\alpha^i)$  とする．また，単位分割定理より，次の条件を満たす関数族  $\{f_\alpha\}$  が存在する．

$$(1) f_\alpha \in C^\infty(M)$$

$$(2) \text{supp}(f_\alpha) \subset U_\alpha$$

$$(3) 0 \leq f_\alpha \leq 1$$

$$(4) \sum_{\alpha} f_\alpha = 1$$

一方，各局所近傍  $U_\alpha$  上のリーマン計量を取る．ここでは一番簡単な

$$g_\alpha = \sum_{i=1}^m dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^i$$

を取り，局所座標近傍  $U_\alpha$  で対称 2 階共変テンソル場  $g_\alpha$  を

$$g_\alpha(P) = \begin{cases} f_\alpha(P)g^{(\alpha)}(P) & (P \in U_\alpha) \\ 0 & (P \notin U_\alpha) \end{cases}$$

で定義すれば

$$\text{supp}f_\alpha \subset U_\alpha$$

であり， $U_\alpha$  は有限交差性を持つから  $M$  全体で定義された

$$g = \sum_{\alpha} g_\alpha$$

が求めるリーマン計量である．

証明から分かるように， $M$  上にはいろいろな計量テンソル場が定義できそうである．実際，局所座標系上，2 次正值リーマン計量をつくり，単位の分割で継ぎ合わせればよい．しかし，実際はそうではなく， $M$  の位相の制約を受ける．例えば半径 1 の球面  $S^2$  上の各点でガウス曲率  $K$  が  $K \equiv 0$  となるリーマン計量は存在しない．なぜなら

$$\int_{S^2} K dV = 0$$

となるがこの積分の値はガウス-ボンネの定理より  $4\pi$  であるからである．

以上がリーマン幾何の土台です．歴史的な背景をつかんだ方が理解しやすいと思いまとめなおしてみました．後は次の章の曲率テンソルを学べば，リーマン幾何の土台は一通り学んだことになります．これからの学習の役に立つことを期待しています．