

## 9. 曲面の内在幾何

曲面の内在幾何とは，曲面上の性質だけで幾何学を行うことです．今まで，曲面は3次元ユークリッド空間内におかれたものとして性質を調べてきました．すなわち，各点で曲面の2つの接ベクトルと法線ベクトルあわせて3つのベクトルで，その点を始点とするすべてのベクトルが表せるとして問題を扱ってきました．内在幾何とは曲面の接ベクトルだけ，すなわち法線ベクトルを考えないで問題を考えることです．別の言い方をすれば，第1基本形式だけを用いて曲面の性質を調べようという態度です．第2基本形式は出てきません（第2基本形式は法線ベクトル  $\vec{n}$  との内積で定めている）．扱う幾何学量は距離を保つ変換（第1基本形式を保つ変換）の元では保たれる性質で，この量を曲面の内在量といいます．

ここでは，内在幾何では微分をどのように扱うか（共変微分）を中心に解説します．リーマン幾何の理解の手助けになると思います．

内在幾何すなわち曲面上の情報だけで行う幾何を解説します．そのために，まず今まで行ってきた，3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の曲面をどのように調べてきたかを復習します．

曲面  $S$  を今までは  $f(u, v)$  と媒介変数として  $u, v$  を用いてきましたが，これからは媒介変数として  $u^1, u^2$  を用います．さらに

$$f(u^1, u^2) = (f^1(u^1, u^2), f^2(u^1, u^2), f^3(u^1, u^2))$$

のように異なる文字を表す数字は右上にかき，右下に使う数字は

$$f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^1 \partial u^2}$$

のようにすべて偏微分を表します．さらにアインシュタイン規約に従います．すなわち，式の上下に同じ文字があるとき，その文字の1と2の和をとることにすると定めます．

曲面  $S$  を  $f(u^1, u^2)$  とします . ただし ,

$$f : (\mathbb{R}^2 \supset) U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

です .

この曲面の第 1 基本形式  $I$ , 第 2 基本形式  $II$  は

$$I = g_{ij} du^i du^j$$

$$II = h_{ij} du^i du^j$$

です . すなわち ,

$$g_{ij} = f_i \cdot f_j$$

$$h_{ij} = f_{ij} \cdot n$$

で定義します .

曲面でも基本的には曲線を調べた方法と同じです . 各点での 3 つのベクトル  $\{ f(u^1, u^2); f_1, f_2, n \}$  に対して  $f_{11}, f_{12}, f_{22}, n_1, n_2$  をそれぞれ  $f_1, f_2, n$  で表して曲面を調べます . ここでの微分は , たとえば ,

$$f_{12} = \frac{\partial^2 f(u^1, u^2)}{\partial u^1 \partial u^2} = \left( \frac{\partial^2 f^1(u^1, u^2)}{\partial u^1 \partial u^2}, \frac{\partial^2 f^2(u^1, u^2)}{\partial u^1 \partial u^2}, \frac{\partial^2 f^3(u^1, u^2)}{\partial u^1 \partial u^2} \right)$$

のことで , 成分  $f^1, f^2, f^3$  ごと微分することです .

$f_{ij}, n_i$  は次のようになります .

$$f_{ij} = \Gamma_{ij}^k f_k + h_{ij} n$$

$$n_i = -h_{ik} g^{kj} f_j$$

この 2 つの式は曲面の微分幾何の基本となるもので , 曲面の基本公式といえます .

詳しくは 6 . 曲面の第 1 基本形式と第 2 基本形式の関係をご覧ください .

曲面  $S$  は

$$f : (\mathbb{R}^2 \supset) U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

で定まります .  $\mathbb{R}^2$  の開集合  $U$  と曲面  $S : f(U)$  は同じものと考えます .

すなわち , 曲面  $S$  上のベクトル  $f_1, f_2$  はそれぞれ  $U$  上の  $\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}$  と同じ

ベクトルです．そこで，これから

$$f_{ij} = d_{f_j}(f_i) = d_{\frac{\partial}{\partial u^j}} f_i = d_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^i}$$

この4つの式は同じ意味です．すなわち，これらはみな  $f_i$  ベクトルを  $f_j$  ベクトル方向すなわち  $u^j$  で偏微分したという意味です．

ここで，記号  $d$  をきちんと定義します．

曲面  $S$  上の2つのベクトル場  $X, Y$  に対して， $\mathbb{R}^3$  における  $Y$  の成分が  $Y = (Y^1, Y^2, Y^3)$

のとき

$$d_X Y = (X(Y^1), X(Y^2), X(Y^3))$$

によって  $d$  を定義します．

すなわち，通常の成分ごとの  $X$  方向の方向微分です．したがって，通常の微分で成り立つ次の命題が成り立ちます．

命題  $X, Y, Z$  は曲面  $S$  上のベクトル場， $f, g$  を曲面  $S$  上の関数とする．このとき次が成り立つ．

- (1)  $d_X Y$  は曲面  $S$  の媒介変数の取り方によらない．
- (2)  $d_{fX+gY} Z = f d_X Y + g d_Y Z$
- (3)  $d_X(fY) = (Xf)Y + f d_X Y$ ,  $d_X(Y+Z) = d_X Y + d_X Z$

曲面  $S$  上のベクトル

$$X = X^1 f_1 + X^2 f_2, Y = Y^1 f_1 + Y^2 f_2$$

について  $d_X Y$  を計算する．

$$\begin{aligned} d_X Y &= X^i d_{f_i}(Y^j f_j) \\ &= X^i \left( \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} f_j + X^i Y^j f_{ji} \right) \\ &= \left( X^i \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) f_k + X^i Y^j h_{ij} n \end{aligned}$$

を得る．

この計算から分かるように， $X, Y$  が共に曲面  $S$  上のベクトル場でもベク

トル  $d_X Y$  は  $S$  上のベクトル場ではありません．それでは  $d_X Y - d_Y X$  は  
 どうでしょうか． $\Gamma_{ij}^k, h_{ij}$  が  $i, j$  に関して対称ですから

$$d_X Y - d_Y X = \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) f_j = \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^j}$$

となり， $d_X Y - d_Y X$  は曲面  $S$  上のベクトルとなります．このベクトル  
 を  $[X, Y]$  と表し， $X$  と  $Y$  の交換子積という．

すなわち，交換子積は

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, Y = Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

のとき

$$[X, Y] = \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^j}$$

である．

ここから曲面の内在幾何に入ります．すなわち，曲面上だけを考え，曲面  
 の法ベクトルは考えないという立場です．

曲面  $S$  上のベクトル

$$X = X^1 f_1 + X^2 f_2, Y = Y^1 f_1 + Y^2 f_2$$

について  $d_X Y$  を計算すると，

$$d_X Y = \left( X^i \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) f_k + X^i Y^j h_{ij} n$$

となりました． $d_X Y$  を曲面の接ベクトルと法ベクトルの和で表したとき  
 の接ベクトルの方だけをとったものを  $\nabla_X Y$  と表す． $\mathbb{R}^3$  におけるベクトル  
 $X$  を接ベクトルと法ベクトルの和で表したときの接ベクトルのだけとったベ  
 クトル，すなわちベクトル  $X$  の接平面への正射影ベクトルを  $X^T$  で表せば

$$\nabla_X Y = (d_X Y)^T$$

となります．

$\nabla_X Y$  をベクトル  $Y$  のベクトル  $X$  方向の共変微分と言います．なお，共  
 変微分と対応させて， $d_X Y$  をベクトル  $Y$  のベクトル  $X$  方向の普通微分と  
 いいます．すなわち，普通微分は  $x, y, z$  成分ごとベクトル  $X$  方向の方向微  
 分です．

共変微分は普通微分の接平面への正射影ですから，普通微分で成り立つことの多くが共変微分でも成り立ちます．まとめると次のようになります．

命題

$X, Y, Z$  は曲面  $S$  上のベクトル場， $f, g$  を曲面  $S$  上の関数とする．このとき次が成り立つ．ただし， $(,)$  は内積である．

- (1)  $\nabla_X Y$  は曲面  $S$  の媒介変数の取り方によらない．
- (2)  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Y + g\nabla_Y Z$
- (3)  $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$ ,  $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- (4)  $\nabla_X Y = d_X Y - (d_X Y, n)n$
- (5)  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$
- (6)  $X(Y, Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z)$

証明

共変微分は普通微分の接平面への正射影であるから，普通微分で成り立つ(1),(2),(3) は当然成り立つ．

(4) は定義である．

$$(5) \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = (d_X Y)^T - (d_Y X)^T = (d_X Y - d_Y X)^T = ([X, Y])^T = [X, Y]$$

$$(6) \quad X(Y, Z) = (d_X Y, Z) + (Y, d_X Z) \\ = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z) \quad (\because X, Y, Z \text{ は } S \text{ 上のベクトル})$$

共変微分  $\nabla_X Y$  は普通微分  $d_X Y$  の曲面  $S$  の接平面への正射影として定義してきた．ここで，リーマン幾何における共変微分の定義を学ぶことも意味のあることと思う．

まず，座標関数の接ベクトル  $\frac{\partial}{\partial u^i}$  の共変微分

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j}$$

を定義すれば，共変微分は上の命題の (2),(3) を満たすとすれば一般のベ

クトル場  $X, Y$  に対して共変微分  $\nabla_X Y$  が定義できる．すなわち，曲面であれば  $2^3$  ( $n$ 次元の多様体であれば  $n^3$ ) 個の  $\Gamma_{ij}^k$  を定義すれば  $\Gamma_{ij}^k$  は何であっても

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k}$$

とすれば，

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, Y = Y^j \frac{\partial}{\partial u^j}$$

に対して

$$\begin{aligned} \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial u^i}} Y^j \frac{\partial}{\partial u^j} \\ = \left( X^i \frac{\partial}{\partial u^i} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \end{aligned}$$

によって曲面上の共変微分が定義できる．

$\Gamma_{ij}^k$  をあたえた曲面  $S$  を疑似接続空間といい， $\Gamma_{ij}^k$  を疑似接続の係数という．

それでは今まで扱ってきた

$$\nabla_X Y = (d_X Y)^T$$

で定まる疑似接続係数は何か興味あることであるがそれは

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \cdots (\#)$$

及び  $(,)$  を内積とするとき

$$Z(X, Y) = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y) \cdots (b)$$

を満たす疑似接続係数は唯一つに定まり，その疑似接続係数が

$$\nabla_X Y = (d_X Y)^T$$

で定めた疑似接続係数である． $(\#)$  を満たす疑似接続係数を対称疑似接続係数といい， $(b)$  を満たす疑似接続係数を距離（第 1 基本形式）に適合する疑似接続係数という．すなわち，対称で距離に適合する疑似接続整数は唯一つ決まり，この疑似接続係数をリーマン接続係数という．さらに，リーマン接続係数をもつ曲面  $(S, \Gamma)$  をリーマン空間という．

話を元に戻そう．偏微分では

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$$

のように、偏微分の順番によらないので、普通微分では任意の曲面  $S$  上のベクトル  $X$  に対して

$$d \frac{\partial}{\partial u_i} d \frac{\partial}{\partial u_j} X = d \frac{\partial}{\partial u_j} d \frac{\partial}{\partial u_i} X$$

が成り立つ。しかし、共変微分ではそうはいかない。

$$\nabla \frac{\partial}{\partial u_i} \nabla \frac{\partial}{\partial u_j} X - \nabla \frac{\partial}{\partial u_j} \nabla \frac{\partial}{\partial u_i} X$$

を調べる。まず、曲面の基本定理で計算した  $f_{ijj} - f_{ikj}$  を思い出そう。ここでやっている微分は普通微分であるから  $f_{ijk} = f_{ikj}$  であり、この関係式より、第1基本基本量  $g_{ij}$  と第2基本量  $h_{ij}$  の関係式を導き出した。その計算を振り返ってみよう。

$$f_{ijk} = \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l - h_{ij} g^{lm} h_{mk} \right) f_l + \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^l h_{lk} \right) n$$

を導き出し、 $f_{ijk} = f_{ikj}$  および  $f_1, f_2, n$  が1次独立より  $f_1, f_2$  の係数に

注目し（ここでは  $n$  の係数は扱わない）次の関係式を得た。

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l + h_{ik} g^{lm} h_{mj} - h_{ij} g^{lm} h_{mk} = 0$$

この式の第1基本量だけで決まる前半の4項を  $R^l{}_{ijk}$  と表す。すなわち

$$R^l{}_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l$$

である。 $R^l{}_{ijk}$  を用いて上の式を書き直すと

$$R^l{}_{ijk} = -h_{ik} g^{lm} h_{mj} + h_{ij} g^{lm} h_{mk}$$

したがって

$$\begin{aligned} R_{sijk} &= R^l{}_{ijk} g_{ls} = -(h_{ik} g^{lm} h_{mj} g_{ls} - h_{ij} g^{lm} h_{mk} g_{ls}) \\ &= -(h_{ik} h_{sj} - h_{ij} h_{sk}) \end{aligned}$$

$R_{sijk}$  を計算することより、

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}$$

以外は0であることがわかる。

$$R_{1221} = h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}$$

であるから曲面の全曲率を  $K$  とすると

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} = \frac{R_{1221}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$$

これが、ガウスの言うすばらしい定理 (Theorema egregium) です。\$R\_{1221}\$ は第 1 基本量だけで決まる量ですから、曲面の全曲率は第 1 基本量だけで決まるという内容です。

さて、ここで出てきた \$R\_{1221}\$ は共変微分を用いると自然に出てきます。それを計算してみましょう。

普通微分の \$f\_{ijk}\$ に対応する共変微分

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^i}$$

を計算します。

$$\begin{aligned} & \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}} \left( \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\ &= \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^s \Gamma_{sk}^l \right) \frac{\partial}{\partial u^l} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} & \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^i} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\ &= \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^s \Gamma_{sk}^l - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{sj}^l \right) \frac{\partial}{\partial u^l} = R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial u^l} \end{aligned}$$

\$R^l\_{ijk}\$ は 0 でない場合があるので、共変微分は交換法則が成り立たないことが分かる。

\$R\_{1221} = g\_{1k} R^k\_{221} = gK\$ が成り立つことが分かっているので、さらに計算をすすめる。ただし、\$K\$ は曲面の全曲率で、\$g\$ は第 1 基本量の行列式すなわち \$g = g\_{11}g\_{22} - g\_{12}g\_{21}\$ である。

$$\begin{aligned} & \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^2}} \frac{\partial}{\partial u^1} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^1}} \frac{\partial}{\partial u^1} \\ &= R^l_{121} \frac{\partial}{\partial u^l} = R^1_{121} \frac{\partial}{\partial u^1} + R^2_{121} \frac{\partial}{\partial u^2} \end{aligned}$$

ここで、

$$R^1_{121} = g^{12} R_{2121} = -\frac{g_{12}}{g} (-Kg) = Kg_{12}, \quad R^2_{121} = g^{22} R_{2121} = -Kg_{11}$$

より

$$\begin{aligned}
&= K \left( \left( \frac{\partial}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial}{\partial u^1} \right) \frac{\partial}{\partial u^1} - \left( \frac{\partial}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial}{\partial u^1} \right) \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \\
&= K \left( \frac{\partial}{\partial u^2} \times \frac{\partial}{\partial u^1} \right) \times \frac{\partial}{\partial u^1} \\
&(\because (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a})
\end{aligned}$$

この式は，曲面論では重要です．曲面上のベクトル  $f_i$  は  $R^2$  上のベクトル  $\frac{\partial}{\partial u^i}$  と同じものと考え計算しています．したがって，次のような形で出てくることもあります．

$$\nabla_{f_1} \nabla_{f_2} f_1 - \nabla_{f_2} \nabla_{f_1} f_1 = K(f_2 \times f_1) \times f_1$$

曲面の普通微分では当然微分の順序に関して交換法則が成り立ちますが，共変微分では成り立ちません．その差は  $R_{1221}$  を使って表せます．一方

$$R_{1221} = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} \cdots (1)$$

ですから，その差を調べることは曲面の曲がり方を調べることになるのです．

(1) 式がガウスのすばらしい定理 (Theorema egregium) といわれています．もちろん，ガウス曲率が第 1 基本量だけで決まるということで，重要ですが，それより微分の順番を変えたときの差がガウス曲率で表せる

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^2}} \frac{\partial}{\partial u^1} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^1}} \frac{\partial}{\partial u^1} \\
&= K \left( \frac{\partial}{\partial u^2} \times \frac{\partial}{\partial u^1} \right) \times \frac{\partial}{\partial u^1}
\end{aligned}$$

の式もガウスは感動したのではと思う．実際，曲面上の内在幾何は，微分の順番を入れ替えると異なります．その差が複雑では使い物になりません．見た目にはとても複雑です．その差が，ガウス曲率で簡単に表せることが分かり，内在幾何が使えものになると確信したのではないのでしょうか．

共変微分の順序を変えたとき，その差がどの程度であるかをもう少し調べます． $X, Y, Z$  が曲面  $S$  のベクトル場のとき新しいベクトル場  $R(X, Y)Z$  を

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

で定義する．

$R(X, Y)Z$  について  $X, Y, Z$  それぞれが和について線型であることは明らかである。

$X, Y, Z$  にそれぞれ  $fX, fY, fZ$  を代入したらどうなるかを調べよう。ただし  $f$  は曲面  $S$  上の関数。

ここでは  $X$  だけ調べる。

$$\nabla_{fX} \nabla_Y Z = f \nabla_X \nabla_Y Z$$

$$\nabla_Y \nabla_{fX} Z = (Yf) \nabla_X Z + f \nabla_Y \nabla_X Z$$

$$\nabla_{[fX, Y]} Z = \nabla_{f[X, Y] - Y(f)X} Z = f \nabla_{[X, Y]} Z - Y(f) \nabla_X Z$$

したがって,

$$R(fX, Y)Z = fR(X, Y)Z \cdots (1)$$

を得る。同様に

$$R(X, fY)Z = fR(X, Y)Z, \quad R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z \cdots (2)$$

を得る。(1),(2) の関係式はとても大切です。というのは、 $R$  は曲面  $S$  上でされているが各点  $P$  で

$$R(P) : T_P(S) \times T_P(S) \times T_P(S) \longrightarrow T_P(S)$$

$$(X_P, Y_P, Z_P) \mapsto R(X_P, Y_P)Z_P$$

が意味があるかどうかは自明ではありません。すなわち、 $R(X, Y)Z$  は共変微分で定義している(微分ですから  $P$  の値だけでは決まらない)。したがって、 $S$  上の点  $P$  における  $R(X, Y)Z$  の値が、 $X, Y, Z$  の  $P$  における値  $X(P), Y(P), Z(P)$  だけで決まることは定義式からは明らかでない。しかし

(1),(2) が成り立つと

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, Y = Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}, Z = Z^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

とおくと

$$R(X, Y)Z = X^i Y^j Z^k R\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \frac{\partial}{\partial u^k}$$

であり

$$R\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \frac{\partial}{\partial u^k}$$

は一定のベクトルより  $R(X, Y)Z$  の点  $P$  における値は  $X, Y, Z$  の  $P$  にお

ける値  $X(P), Y(P), Z(P)$  で決まることがわかる .

したがって , (1),(2) が成り立つこととて , 各点で 3 重線形写像

$$R(P) : T_P(S) \times T_P(S) \times T_P(S) \longrightarrow T_P(S)$$

$$(X_P, Y_P, Z_P) \mapsto R(X_P, Y_P)Z_P$$

が定義される .

また , (1),(2) より次のことも分かります .

$R(X, Y)Z$  がベクトル場の基底  $\{\frac{\partial}{\partial u^i}\}$  のとり方によらないことが自動的に分かります .

すなわち , 基底  $\{\frac{\partial}{\partial u^i}\}$  と  $\{\frac{\partial}{\partial v^i}\}$  の変換は

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial v^j}$$

であるから ,

$$R\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \frac{\partial}{\partial u^k} \\ = \frac{\partial v^p}{\partial u^i} \frac{\partial v^q}{\partial u^j} \frac{\partial v^r}{\partial u^k} R\left(\frac{\partial}{\partial v^p}, \frac{\partial}{\partial v^q}\right) \frac{\partial}{\partial v^r}$$

となり , 座標変換のときについてまわる確認が不要になります . ここで述べた座標変換による規則性はテンソルであることを示すための条件です . すなわち ,

和に関する線形性 (これは比較的簡単に示すことができる)

及び

(1),(2) すなわち  $fX$  を代入したとき関数  $f$  が外に出る事

を示せば各点でテンソルを定義するテンソル場であることが示される .

テンソル (多重線形写像のこと) であることの確認を座標変換で行うとすると , 煩雑で気が重くなる . 一方 (1),(2) の確認は簡単な計算の場合が多い .

これらの内容は例えば微分幾何のバイブルと言われる

S.Kobayashi, K.Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Wiley-Intersciences

は 26 ページの命題 3.1 であるし ,

ミルナー モース理論 吉岡書店

は補助命題 9.1 である．あわせて参考にされるとよいと思う．