

12. ガウスーボンネの定理

ここでは、曲面のガウスーボンネの定理を扱います。

今までは、曲面や曲線の局所的な話題を扱ってきました。すなわち、曲線の曲率、捩率、曲面の全曲率、平均曲率等は、その点の周辺だけで定義できる幾何学量です。使う内容はその点における微分だけです。

当然積分を考えることは自然の成り行きです。積分を用いて曲面全体の状況を調べようというのが大域微分幾何といわれる内容です。

空間における曲線の接ベクトルを $\alpha(s)$ とすると、曲率 $k(s)$ は

$$\alpha'(s) = k(s)\beta(s)$$

を満たします。

曲面上の曲線 C において、曲線の測地曲率を曲線上積分することにより得られる等式が標題のガウスーボンネの定理です。

曲面 S の測地座標をとる。すなわち、第1基本形式が

$$I = du^2 + Gdv^2$$

のときを考える。ちなみにこのような座標系が各点の近傍で存在することは示されている。

領域 D を囲む曲線を C 、曲線 C と u 曲線とのなす角を $\theta(s)$ とすると、曲線 C の測地曲率 k_g は

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial u} \sin \theta(s)$$

が成り立ちます（測地線と測地曲率の8ページの(4)の式に $E=1$ を代入）。

したがって、

$$\int_C k_g ds = \int_C d\theta + \int_C \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial u} \sin \theta(s) \right) ds$$

となる。

右辺の第2項をグリーンの定理

$\int_{\partial D} f dv = \iint_D df dudv$
 を用いるために変形をする .

すなわち ,

$$\sqrt{G} \frac{dv}{ds} = \sin \theta(s)$$

より

$$(\text{右辺第 2 項}) = \frac{1}{2} \int_C \frac{G_u}{\sqrt{G}} dv = \int_C (\sqrt{G})_u dv$$

さらに , グリーンの定理より

$$= \iint_D (\sqrt{G})_{uu} dudv$$

一方曲面 S のガウス曲率 $K(u, v)$ は

$$K(u, v) = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$$

であるから (曲面の第 1 基本形式と第 2 基本形式の関係の 7 ページ)

$$= - \iint_D K(u, v) \sqrt{G} dudv$$

したがって , $\sqrt{G} dudv$ は面積要素で $d\sigma$ とおけば

$$\int_C k_g ds = \int_C d\theta - \iint_D K(u, v) d\sigma$$

を得る . この等式 (1) が局所的ガウス-ボンネの定理です . 定理として述べれば次のようになります .

定理 (局所的ガウス-ボンネの定理)

曲面 S 上の区分的に滑らかな単純閉曲線

$$C = C_1 + \cdots + C_n$$

によって囲まれた単連結で向きをついた閉領域 D について次の等式が成り立つ .

$$\int_C k_g ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} d\theta - \iint_D K dudv \cdots (1)$$

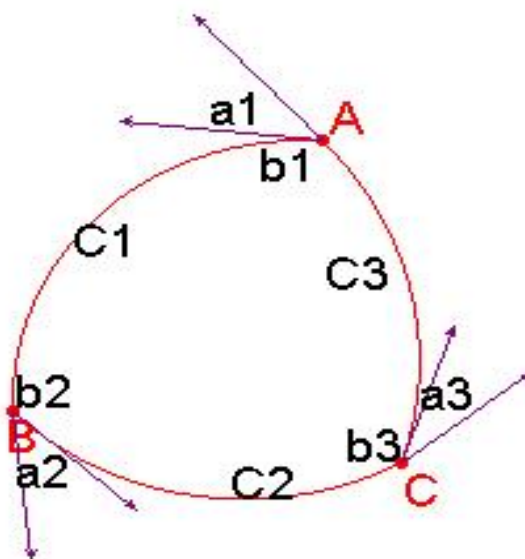
ただし , k_g は曲線 C 上の測地曲率 , K は S 上のガウス曲率

等式 (1) を見てみましょう . 測地曲率 , ガウス曲率 , 角度は第 1 基本量だけできまる量 (第 2 基本量は関係しない) であることが分かります .

次に, 1つの測地座標の中の3本の滑らかな曲線 AB, BC, CA による閉曲線を考えよう.

右の図で, 各頂点における曲線のなす角が b_1, b_2, b_3 で, その外角が a_1, a_2, a_3 である. 当然 $b_i = \pi - a_i$ が成り立つ.

曲線 AB, BC, CA をそれぞれ C_1, C_2, C_3 とし, C_1, C_2, C_3 で囲まれた領域を D とする. このとき, ガウスボンネの定理より



$$\sum_{i=1}^3 \int_{C_i} k_g ds = \sum_{i=1}^3 \int_C d\theta - \iint_D K(u, v) d\sigma$$

右辺の第1項は

$$\sum_{i=1}^3 \left(\int_{C_i} d\theta \right) + a_1 + a_2 + a_3 = 2\pi$$

である. したがって, $C_1 + C_2 + C_3 = C$ とおけば

$$\begin{aligned} \int_C k_g ds &= 2\pi - (a_1 + a_2 + a_3) - \iint_D K(u, v) d\sigma \\ &= b_1 + b_2 + b_3 - \pi - \iint_D K(u, v) d\sigma \quad \cdots (2) \end{aligned}$$

先に進む前に (2) で分かることを調べよう.

平面で $\triangle ABC$ を考えれば, $K(u, v) = 0$, 直線は測地線であるから $k_g = 0$. したがって, (2) は 三角形の内角の和は 180° を意味する.

曲面上に滑らかな単連結な閉測地線 C が存在するとき, (2) は

$$\iint_D K(u, v) d\sigma = 2\pi$$

となる. したがって, 次の命題を得る.

命題

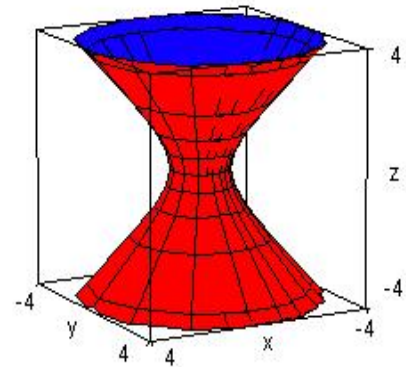
全曲率がいたるところ正でない単連結 (曲面上の任意の閉曲線が連続的に1点に収縮可能) な曲面上に滑らかな閉測地線は存在しない.

この命題は次のようにいうこともできる .

命題

全曲率がいたるところ正でない曲面上には連続的に 1 点に収縮可能な滑らかな閉測地線は存在しない .

この命題は , 全曲率がいたるところ正でない曲面には滑らかな閉測地線は存在しないという意味ではない . 実際一葉双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ はいたるところ全曲率が負の曲面であるが , 曲面上の曲線 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ は閉測地線である . ただこの測地線は連続的に 1 点に収縮可能ではない .



ガウスボンネの定理の仕上げに入ろう .

曲面 S を曲線三角形 T_1, T_2, \dots, T_n に分割されたとする . なお , 曲線三角形 ABC とは , 2 点間が曲線で結ばれた図形である . ここで , 曲面 S を曲線三角形に分割するとは次の 3 条件を満たす分割のことである .

(1) S 上の点 P は少なくとも 1 つの曲線三角形 T_i に含まれる . もしその点 P が T_i の内部にあるなら , T_i が P を含む唯一の三角形である .

(2) P が T_i の頂点でない辺上のあるとき , P を含み三角形はもう一つ存在しそれを T_j とする . このとき P は $T_i \cup T_j$ の内部に属する .

(3) P が T_{i_1} の頂点のとき , P を頂点とする三角形は有限個存在して , それを $T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_k}$ とする . 必要があれば順番を入れ替えることにより , 隣同士が一つの共有辺を持ちかつ P は $T_{i_1} \cup T_{i_2} \cup \dots \cup T_{i_k}$ の内部にある .

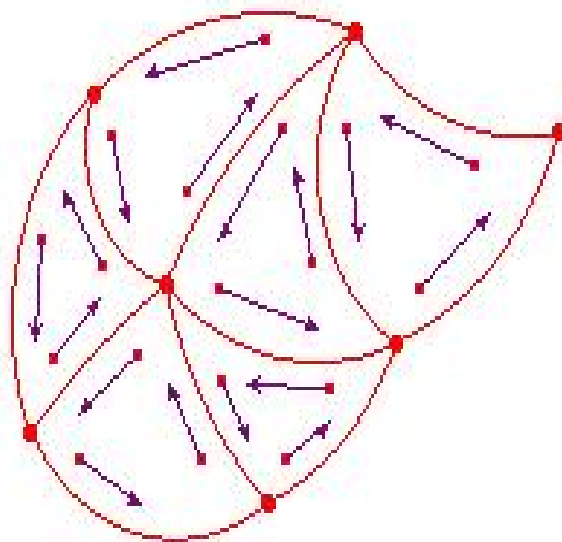
曲面 S がコンパクトな境界のない曲面のときこのような有限個の曲線三

角形による分割が必ず存在すること知られているが，そのことは直感的に明らかかなことであろう．

曲面 S を三角形分割し，それぞれの三角形でガウスーボンネの等式

$$\int_C k_g ds + \iint_D K(u, v) d\sigma = b_1 + b_2 + b_3 - \pi$$

を適用する．ここで，考える曲面は向きつけ可能な場合だけを考える．測地曲率の積分は内部を左側に見る向きで行う．すべての三角形で積分すると，どの辺も2度積分され，向きが反対であるから，和をとると測地曲率の積分は0になる．



b_i は曲線三角形の内角であるから，すべての三角形に関して加えると，分割された三角形の個数を p ，辺の数を q ，頂点の個数を r とすると，

$$\iint_S K(u, v) d\sigma = 2\pi \times r - \pi \times p$$

である．さらに，三角形の個数 p と辺の数 q は

$$3p = 2q$$

を満たすから

$$2r - p = 2r - 3p + 2p = 2(r - q + p)$$

となる．この $r - q + p$ は曲面 S の標数といわれる数で，曲面の位相不変量であり $\chi(S)$ と表す．

まとめるとガウスーボンネの定理は次のようになる．

$$\iint_S K(u, v) d\sigma = 2\pi\chi(S)$$

この等式を通常，境界のないコンパクトな曲面のガウスーボンネの定理という．

境界のない，コンパクトな曲面の標数は通り抜けることのできる穴の個数で決まることが知られている．この通り抜けることのできる穴の個数のことを種

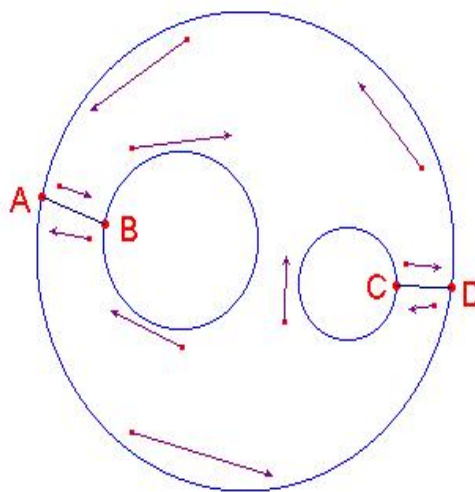


数 (genus) と呼ぶ．球面の種数は 0 で，右の図は左からそれぞれ種数が 1,2,3 の曲面である．種数 g の閉曲面（境界のないコンパクトな曲面） S の標数は $\chi(S) = 2(1 - g)$ である．

種数 g の曲面のガウス－ボンネの定理は次のように示すことができる．なお，図は種数 2 の場合である（上の真ん中の図）．

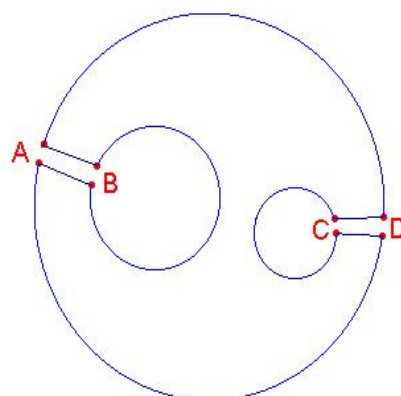
水平に真ん中で切れば，円の中に g 個の円がある図を考えることになる．

外の円から中の円への道，図で言えば AB と CD をつくって考える．矢印の向きにしたがって一周するとき，接ベクトルは 2π だけ回転する．これは自明ではないが，下の図を見ると分かりやすい．すなわち， AB, CD の切り目をいれる．接ベクトルの始点と終点の向きは同じだから，一周したときの接ベクトルの回転角は 2π の定数倍で



あり，さらに曲線を動かしたとき回転角は連続に変化する．すなわち閉曲線を少し動かして回転角はかわらない（少し動かすことにより 2π から 0 や 4π にはかわれない）．上の図を少しずつ動かせば円にできるから一周したときの接ベクトルの回転角は 2π である．

次に、外の円から新しく作った道に移るとき及び戻るとき合わせて π だけ動く。同じようなところが $2g$ 個ある。したがって、曲線を一周するとき飛躍するところを除いた接ベクトルの回転する角は $2\pi - 2g\pi$ である。



このことは AB, CD のところでは接ベクトルはまっすぐ進むので、外の円で左回り 1 回、内側の g 個の円で右回り g 回と考えたほうが分かりやすいかもしれない。

さらに、外の円と内側の円を結ぶ道は、行きと帰り 2 度通るから、測地曲率の積分は相殺される。

外側の円を C , 内側の円を C_1, C_2, \dots, C_g , これらの円で囲まれた領域を D_1 とするとガウス-ボンネの定理より

$$\iint_{D_1} K(u, v) d\sigma + \int_{C+C_1+\dots+C_g} k_g ds = 2\pi - 2g\pi = 2\pi(1 - g)$$

このような図形が上と下にあり、2 つを加えれば外の円の部分だけ向きが反対で測地曲率の積分が相殺されるので次の式を得る。

$$\iint_S K(u, v) d\sigma = 4\pi(1 - g) = 2\pi\chi(S)$$

これは、種数 g の曲面のガウス-ボンネの定理である。

さて、ガウス-ボンネの定理は内容はもちろんすばらしい定理であるが、曲面におけるグリーンの定理を学ぶのに適切な題材である。

多変数の積分で学ぶ、グリーンの定理、ガウスの定理、ストークスの定理は

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

のことであるが、内在幾何 (Intrinsic geometry) では曲面の外部を考慮しないので扱うのは、曲面 $f(u, v)$ 上の領域 D と D を囲む閉曲線 C における

グリーンの定理

$$\int_C p du + q dv = \iint_D (-p_v + q_u) du dv$$

だけである。

しかし、グリーンの定理を用いるときそれほど簡単でない。というのは、通常の曲面上の曲線 C は弧長変数で表されるので曲線上の関数も弧長 s の関数である。すなわち

$$\int_C p(s) ds$$

を

$$\int_C q(u, v) du + r(u, v) dv$$

の形に変形する必要がある。

ガウス-ボンネの証明を測地座標系を用いてすなわち第1基本形式が

$$I = du^2 + G dv^2$$

の場合に証明した。もちろん式から見て分かるように、この場合に証明するのが一番分かりやすい。

ここでは第1基本形式が

$$I = Edu^2 + G dv^2$$

の場合にガウス-ボンネの定理を証明する。

証明の結果より、グリーンの定理が扱えるようにどのように変形したかに注目して欲しい。

第1基本形式が

$$I = Edu^2 + G dv^2$$

のときの弧長変数の曲線

$$C : f(u(s), v(s))$$

の測地曲率 k_g は

$$k_g = -\frac{\cos \theta}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial v} + \frac{\sin \theta}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u} + \frac{d\theta}{ds} \cdots (\#)$$

である（測地線と測地曲率の 8 ページの (4) の式）。

(#) で θ は u 座標曲線と曲線 C のなす角である。

曲線 $f(s)$ の速度ベクトルは曲線 C と u 座標曲線とのなす角が θ である

から

$$\frac{df}{ds} = \cos \theta \frac{f_u}{\sqrt{E}} + \sin \theta \frac{f_v}{\sqrt{G}}$$

一方,

$$\frac{df}{ds} = f_u \frac{du}{ds} + f_v \frac{dv}{ds}$$

より

$$\frac{du}{ds} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{E}}, \frac{dv}{ds} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{G}}$$

$$\therefore \cos \theta ds = \sqrt{E} du, \sin \theta ds = \sqrt{G} dv$$

閉曲線 C の囲む領域を D とする。

$$\begin{aligned} & \int_C k_g ds \\ &= \int_C \left(-\frac{\cos \theta}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial v} + \frac{\sin \theta}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u} + \frac{d\theta}{ds} \right) ds \end{aligned}$$

第 3 項は問題ないので、初項と第 2 項の計算をする。

$$\int_C \frac{1}{2\sqrt{EG}} (-E_v du + G_u dv)$$

ここでグリーンの定理より

$$= \iint_D \left(\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right) dudv \cdots (1)$$

$$= \iint_D \left\{ \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right\} dudv \cdots (2)$$

$$= - \iint_D K(u, v) \sqrt{EG} dudv \cdots (3)$$

となる。最後の等式はガウス曲率を計算する必要がある。

上記の変形で (1) から (2) へは単純な変形で問題ない。ここでは (2) から

(3) の変形の確認をしよう。

「曲面の第 1 基本形式と第 2 基本形式の関係」の 7 ページに

$$I = Edu^2 + Gdv^2$$

のときの曲率テンソル R_{1221} が計算されておりその結果を用いる。なお、

$$R_{1221} = LN - M^2$$

が成り立つ .

$$R_{1221} = -\frac{E_{vv} + G_{uu}}{2} + \frac{E_u G_u}{4E} + \frac{E_v G_v}{4G} + \frac{E_v^2}{4E} + \frac{G_u^2}{4G}$$

であった .

一方

$$\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{E_{vv}}{2} + \frac{G_{uu}}{2} - \frac{E_v^2}{4E} - \frac{E_v G_v}{4G} - \frac{E_u G_u}{4E} - \frac{G_u^2}{4G} \right)$$

したがって , $R_{1221}(= LN - M^2)$ と

$$\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u$$

を比較することにより

$$R_{1221} = -\sqrt{EG} \left\{ \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right\}$$

である . したがってガウス曲率 $K(u, v)$ は

$$K(u, v) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{R_{1221}}{EG}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right\}$$

となる . したがって , (2) から (3) が示された .

ガウス-ボンネの定理で用いた

$$R_{1221} = LN - M^2$$

の計算式は第 1 基本量だけでガウス曲率を求めるときにしばしば用いられる . ここにまとめておこう .

• $I = Edu^2 + Gdv^2$ のとき

$$R_{1221} = -\frac{E_{vv} + G_{uu}}{2} + \frac{E_u G_u}{4E} + \frac{E_v G_v}{4G} + \frac{E_v^2}{4E} + \frac{G_u^2}{4G}$$

$$= -\sqrt{EG} \left\{ \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right\}$$

• $I = du^2 + Gdv^2$ のとき

$$R_{1221} = -\frac{G_{uu}}{2} + \frac{G_u^2}{4G} = -(\sqrt{G})_{uu}\sqrt{G}$$

例

$$I = \frac{du^2}{v^2} + \frac{dv^2}{v^2}$$

のガウス曲率を求めよう。

$$R_{1221} = -\frac{1}{v^2} \left(\frac{(\frac{1}{v})_v}{\frac{1}{v}} \right)_v = -\frac{1}{v^4}$$

$$EG = \frac{1}{v^4}$$

よりガウス曲率 K は

$$K = -1$$

である。

なお，一般の

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

のときの R_{1221} もいくつかの計算公式はあるがどれも簡単ではない。興味があれば

大槻富之助 微分幾何学 朝倉書店

および同書の姉妹書である

同演習

をご覧ください。