

## 2. 曲面の第 2 基本形式

前の章で曲面の第 1 基本形式を扱いました．ここでは，曲面の曲がり方を調べるのに重要な第 2 基本形式を解説します．

まず，関数のテイラー公式を復習しましょう．テイラー公式といっても 2 次の導関数までです．

1 変数関数  $y = f(x)$  では

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a+\theta h)h^2}{2} \\ &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2} + o(h^2) \end{aligned}$$

ただし， $o(h^2)$  は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^2)}{h^2} = 0$$

を満たす．

この式の意味は  $h$  が十分小さいとき

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h \quad (\text{1 次の近似})$$

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2} \quad (\text{2 次の近似})$$

と近似できるということです．

2 変数の関数  $z = f(u, v)$  でも同じです．

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k \\ &+ \frac{f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k)h^2 + 2f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k)hk + f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k)k^2}{2} \\ &= f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k \\ &+ \frac{f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2}{2} + o(h^2 + k^2) \end{aligned}$$

ただし， $o(h^2 + k^2)$  は

$$\lim_{h^2+k^2 \rightarrow 0} \frac{o(h^2 + k^2)}{h^2 + k^2} = 0$$

を満たす．

すなわち， $h, k$  の絶対値が十分小さいとき

$$f(a+h, b+k) \doteq f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k \quad \cdots (\text{1 次の近似})$$

$$f(a+h, b+k) \doteq f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \frac{f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2}{2} \dots (2 \text{ 次の近似})$$

となります。

次に、曲面  $z = f(x, y)$  が原点を通り、原点における接平面が  $xy$  平面のとき、すなわち

$$f(0, 0) = 0, f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$$

のときの原点の近くにおけるこの曲面の概形を調べましょう。

原点の周りにおける  $f(x, y)$  は

$$f(x, y) - f(0, 0) = f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2}{2} + o(x^2 + y^2) \dots (1)$$

であり

$$f_{xx}(0, 0) = L, f_{yy}(0, 0) = N, f_{xy}(0, 0) = M$$

とおくと (1) の主要部分の 2 倍は

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dots (2)$$

である。

2 次の対称行列  $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$  は回転を表す行列で対角化できる。言い方を

変えれば  $z$  軸の周りに曲面を回転すれば (2) は

$$px^2 + qy^2$$

と表せる。ただし  $p, q$  は行列  $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$  の固有値である。

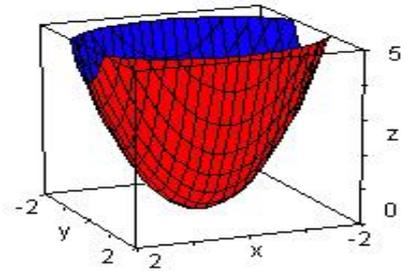
$$p + q = L + N, pq = LN - M^2$$

を満たすから  $z = f(x, y)$  の近似式は次のようにまとめられる。

(1)  $LN - M^2 > 0, L > 0$  のとき

$$z = \frac{px^2 + qy^2}{2}$$

となる。ただし  $p > 0, q > 0$  (右図)



(2)  $LN - M^2 > 0, L < 0$  のとき  $p, q$

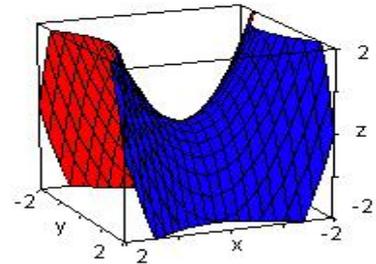
が負であるから (1) を裏返したものである。

(3)  $LN - M^2 < 0$  のとき

$$z = \frac{px^2 + qy^2}{2}$$

となる。ただし  $pq < 0$

(右図)



(4)  $AB - C^2 = 0$  の場合は

$$z = \frac{px^2}{2}$$

となる。

これは  $xz$  平面上の放物線  $z = \frac{px^2}{2}$  を  $y$  軸方向の平行移動することにより得られる曲面である。

以上は微分積分でおこなう 2 変数関数の極値を調べるときに行う議論である。この議論を一般の曲面で行うのがこれからの話である。

すなわち、曲面が与えられたとき、曲面上の点  $P$  のおける接平面を考え、この接平面が  $xy$  平面に対応し、接平面の単位法線ベクトルが  $z$  軸に対応する。

ここで調べるのは、曲面の接平面から離れる度合いである。この度合いが曲面の第 2 基本形式である。すなわち、接平面から離れる度合いで曲面の曲がり方をはかろうというわけである。

なお、上で説明した曲面の近似式はデュパンの標形で扱われる。

本来は曲面  $\vec{f}(u, v)$ , 曲面の単位法線ベクトルは  $\vec{n}$ , 2 点  $P, Q$  を結ぶベク

トルは  $\overrightarrow{PQ}$  のようにベクトル表記するか太文字で表すべきですがここでは  $f(u, v), n, PQ$  とベクトル表記はしない。

それでは本題に入る。

曲面  $f(u, v)$  上の点  $P(f(u, v))$  と点  $P$  に近い点  $Q(f(u + \Delta u, v + \Delta v))$  が与えられている。点  $Q$  と、点  $P$  における曲面  $f(u, v)$  の接平面との有向距離  $d$  を求めます。  $d$  の絶対値が大きければ曲がり方が大きいし、  $d$  の絶対値が小さければ曲がりかたが小さいさくなります。点  $P$  における単位法線ベクトル  $n$  を

$$n = \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$$

によって定めれば  $d$  は

$$d = PQ \cdot n$$

となります。もちろん  $n$  の向きを反対に取れば  $d$  の符号は反対になります。

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v)$$

の値を計算しましょう。

テイラーの公式より

$$PQ = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v) = f_u \Delta u + f_v \Delta v + \frac{f_{uu}(\Delta u)^2 + 2f_{uv}\Delta u\Delta v + f_{vv}(\Delta v)^2}{2} + o((\Delta u)^2 + (\Delta v)^2)$$

$f_u, f_v$  は  $P$  における接平面上のベクトルであるから  $Q$  と接平面との有向距離  $d$  は

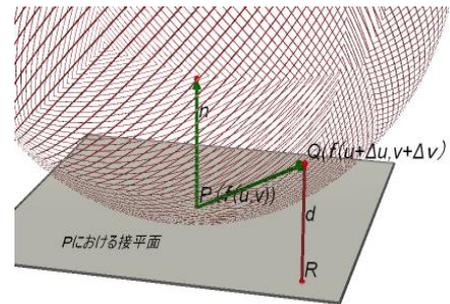
$$d = PQ \cdot n = \left( \frac{f_{uu}(\Delta u)^2 + 2f_{uv}\Delta u\Delta v + f_{vv}(\Delta v)^2}{2} + o((\Delta u)^2 + (\Delta v)^2) \right) \cdot n$$

ここで、

$$L = f_{uu} \cdot n$$

$$M = f_{uv} \cdot n$$

$$N = f_{vv} \cdot n$$



とおけば

$$d = \frac{L(\Delta u)^2 + 2M\Delta u\Delta v + N(\Delta v)^2}{2} + o((\Delta u)^2 + (\Delta v)^2) \cdot n$$

したがって,  $f(u + \Delta u, v + \Delta v)$  と接平面との有向距離  $d(\Delta u, \Delta v)$  の2

次の主要部は

$$\frac{L(\Delta u)^2 + 2M\Delta u\Delta v + N(\Delta v)^2}{2}$$

となります.

ここで  $\Delta u$  を  $du$ ,  $\Delta v$  を  $dv$  とおきかえた2次の微分式  $II$  を

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

で定義し, 曲面  $f(u, v)$  の第2基本形式という.  $L, M, N$  を第2基本形式の係数または第2基本量という.

$$d^2f = f_{uu}du^2 + 2f_{uv}dudv + f_{vv}dv^2$$

であるから, 第2基本形式は  $d^2f \cdot n$  と表すことができる. したがって,

$$II = d^2f \cdot n = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

となります.

第2基本形式の係数  $L, M, N$  は

$$L = f_{uu} \cdot n, \quad M = f_{uv} \cdot n, \quad N = f_{vv} \cdot n$$

で定義しました.

ここで,

$$f_u \cdot n = f_v \cdot n = 0 \text{ ですから}$$

$$f_{uu} \cdot n + f_u \cdot n_u = 0$$

$$f_{uv} \cdot n + f_u \cdot n_v = 0$$

$$f_{vu} \cdot n + f_v \cdot n_u = 0$$

$$f_{vv} \cdot n + f_v \cdot n_v = 0$$

したがって,

$$L = f_{uu} \cdot n = -f_u \cdot n_u,$$

$$M = f_{uv} \cdot n = -f_u \cdot n_v = -f_v \cdot n_u,$$

$$N = f_{vv} \cdot n = -f_v \cdot n_v$$

$df \cdot n = 0$  であるから第 2 基本形式は

$$II = d^2 f \cdot n = -df \cdot dn = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

と書くことができる。

次に第 2 基本形式  $II$  が座標変換で不変であるかどうかを調べます。

これは第 1 基本形式  $I$  とは少し異なります。結論からいうと、向きを保つ座標変換のもとで第 2 基本形式  $II$  は不変であるとなります。

まず、 $df$  が座標変換で不変であることは第 1 基本形式のところでも述べたとおりです。もう一度書くと、

$$df = f_u du + f_v dv$$

について、座標変換を

$$x = x(u, v), y = y(u, v)$$

とする。このとき、

$$f_x = f_u \frac{\partial u}{\partial x} + f_v \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$f_y = f_u \frac{\partial u}{\partial y} + f_v \frac{\partial v}{\partial y}$$

より

$$f_x dx + f_y dy = (f_u \frac{\partial u}{\partial x} + f_v \frac{\partial v}{\partial x}) dx + (f_u \frac{\partial u}{\partial y} + f_v \frac{\partial v}{\partial y}) dy$$

ここで、

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

であるから

$$= f_u du + f_v dv$$

$$\therefore f_u du + f_v dv = f_x dx + f_y dy$$

したがって、 $df$  は座標曲線のとり方によらないことがわかった。

一方、2つの座標系  $(u, v), (x, y)$  で

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} > 0$$

すなわち，2つの座標系の向きが同じとき，曲面の法線ベクトル  $n$  は一致するから  $dn$  も当然一致する．

したがって，このとき第2基本形式

$$II = d^2 f \cdot n = -df \cdot dn = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

は一致します．なお，

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} < 0$$

のときは，法線ベクトルが逆の向きになりますから符号が逆になります．

すなわち，2つの座標系  $(u, v), (x, y)$  の共通部分におけるヤコビ行列式が負すなわち

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} < 0$$

のとき， $(u, v)$  座標の第2基本形式を  $II$  とすると  $(x, y)$  座標の第2基本形式は  $-II$  となります．

例

双曲放物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

の  $a = b = 1$  の場合に第1基本量，第2基本量を求めよう．なお，この曲面は馬の鞍と呼ばれている．

媒介変数表示すると

$$f(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$$

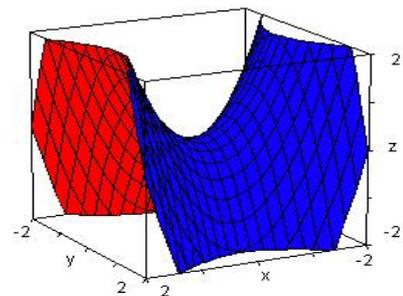
である．

$$f_u = (1, 0, 2u), f_v = (0, 1, -2v)$$

したがって，

$$E = 1 + 4u^2, F = -4uv, G = 1 + 4v^2$$

単位法線ベクトルは



$$\vec{n} = \frac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

$$f_{uu} = (0, 0, 2), f_{uv} = (0, 0, 0), f_{vv} = (0, 0, -2)$$

であるから

$$L = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

$$M = 0$$

$$N = \frac{-2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

第 1 基本形式は

$$I = (1 + 4u^2)du^2 + -8uvdudv + (1 + 4v^2)dv^2$$

第 2 基本形式は

$$II = \frac{2(du^2 - dv^2)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

となる .

曲面の第 1 基本形式 , 第 2 基本形式の例については

小林昭七著 曲線と曲面の微分幾何 裳華房

が優れています . そちらをご覧ください .