

1. 曲面の第1基本形式

これから3次元ユークリッド空間における曲面を扱います。

曲面を表す方法はいくつかありますが、ここでは次の媒介変数表示の方法を用います。

U を \mathbb{R}^2 内の開領域、 \mathbb{R}^2 内の点の座標を (u, v) で表します。 U から \mathbb{R}^3 への1対1の写像を f とする。 f の像 S をユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の曲面といいます。

すなわち、曲面 $S : f(u, v)$ とは

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} f^1(u, v) \\ f^2(u, v) \\ f^3(u, v) \end{pmatrix}$$

のことで、 $f(u, v)$ は u, v のベクトル値関数であり、本来 $\vec{f}(u, v)$ または f は太字で表すべきなのですが、ここでは $f(u, v)$ のように通常関数のように表記します。この曲面 S の表し方を曲面の u, v を媒介変数とする媒介変数表示といいます。なお、曲面を表すために用いた3つの関数 $f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v)$ はいずれも3階以上連続微分可能な関数とします。

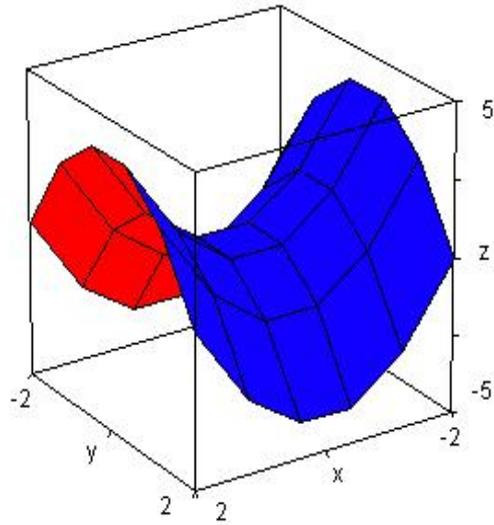
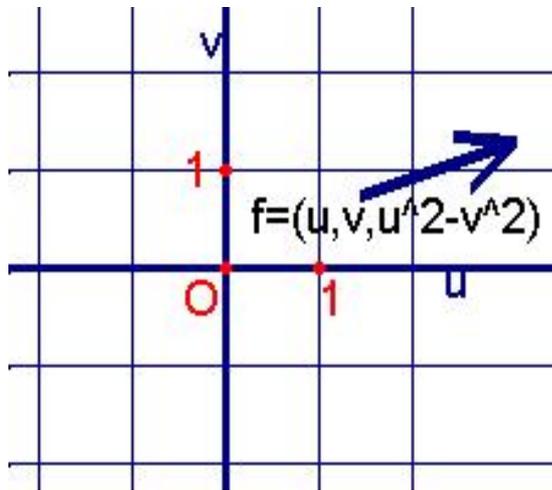
偏微分は

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f_u, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = f_{uv}$$

と表します。したがって、たとえば

$$f_{uv} = \begin{pmatrix} f_{uv}^1 \\ f_{uv}^2 \\ f_{uv}^3 \end{pmatrix}$$

のことです。



曲面 $S : f(u, v)$ が与えられたとき， v_0 を固定すれば変数 u を媒介変数とする曲面上の曲線 $f(u, v_0)$ が定まります．この曲線を u 座標曲線または u 曲線といいます． v 座標曲線 (v 曲線) も同様に定義します． u 曲線及び v 曲線を曲面 $f(u, v)$ の座標曲線といいます．さらに，すべての u 曲線， v 曲線からなる曲線網を座標曲線網といいます．もちろん座標曲線網のすべてを表すことはできません．塗りつぶされてしまいます．パソコンで曲面を書くと，飛び飛びの座標曲線が記入されています．

曲面の媒介変数表示 $f(u, v)$ とは， u, v 平面上 (2次元ユークリッド平面) のゴムでできた領域を，伸び縮み湾曲させて3次元ユークリッド空間においたものです．座標曲線は，元のゴムの領域に， u 軸に平行な直線， v 軸に平行な直線がそれぞれ等間隔に引いてあるということです．

次に， (u, v) に対して2つのベクトル f_u, f_v は1次独立を仮定する．これは議論を進めれ上での枝葉末節の議論を避けるためです．別の書きかたをすると

$$\text{rank}(f_u f_v) = \begin{pmatrix} f_u^1 & f_v^1 \\ f_u^2 & f_v^2 \\ f_u^3 & f_v^3 \end{pmatrix} = 2$$

となります． S 上の点 P で f_u と f_v が1次独立のとき，曲面 f は点 P で

正則であるといい， f が各点で正則であるとき，曲面 f を正則曲面といいます．

以下，特別に断らない限り曲面 f は正則曲面とします．

曲面上の点 P において，この曲面に垂直なベクトル $f_u \times f_v$ を曲面 f の法線ベクトルという．長さ 1 の法線ベクトル

$\frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$
を単位法線ベクトルという．

外積の定義より，

$(f_u, f_v$ の定める平行四辺形の面積) $= |f_u \times f_v|$

が成り立つ．

a, b, c, d をベクトルとすると，ラグランジュの恒等式より

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$$

である． f_u, f_v のなす角を θ とすると，

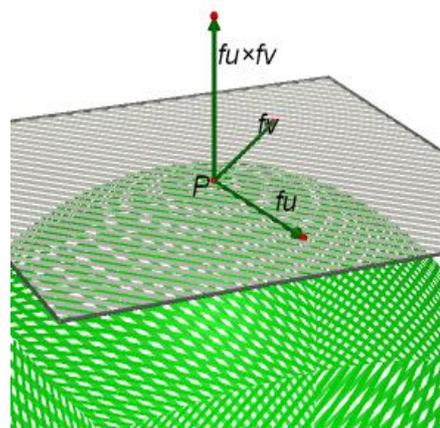
$$|f_u \times f_v|^2 = (f_u \times f_v) \cdot (f_u \times f_v)$$

$$= |f_u|^2 |f_v|^2 - |f_u \cdot f_v|^2$$

$$= |f_u|^2 |f_v|^2 - |f_u|^2 |f_v|^2 \cos^2 \theta$$

$$= (|f_u| |f_v| \sin \theta)^2$$

が成り立つ．



次に，曲面 $S : f(u, v)$ に対しては別の媒介変数表示 $g(u', v')$ も考えられます．曲線の場合にも述べましたが，媒介変数による表示は，曲面の表示法の 1 つです．曲面を表示する媒介変数表示は幾らでもあるので，曲面の持つ性質が座標のとり方で変わらないことが大切です，曲面上の量が出てくるたびに，座標変換で不変であることを調べることになります．これは，どの座標

でやっても同じことの保証でさけて通れません。

座標変換で不変であることを示す土台となる，座標変換で接ベクトルがどのように変わるかを調べましょう。

$f(u, v), g(u', v')$ を曲面 S の媒介変数表示とします。

(u, v) を定めれば曲面 S 上の点 P が定まり，点 P に対応する (u', v') が定まります。したがって，

$$(u, v) \mapsto (u', v')$$

が定義され，その対応を

$$u' = u'(u, v), v' = v'(u, v)$$

逆の対応を

$$u = u(u', v'), v = v(u', v')$$

とします。

$$f(u, v) = f(u(u', v'), v(u', v')) = g(u', v')$$

であるから，

$$g_{u'} = f_u \frac{\partial u}{\partial u'} + f_v \frac{\partial v}{\partial u'}$$

$$g_{v'} = f_u \frac{\partial u}{\partial v'} + f_v \frac{\partial v}{\partial v'}$$

これを行列で表すと

$$\begin{pmatrix} g_{u'} \\ g_{v'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u'} \\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix}$$

曲面 S の座標 $g(u', v')$ のもとでの法線ベクトル $g_{u'} \times g_{v'}$ は

$$g_{u'} \times g_{v'} = \left(f_u \frac{\partial u}{\partial u'} + f_v \frac{\partial v}{\partial u'} \right) \times \left(f_u \frac{\partial u}{\partial v'} + f_v \frac{\partial v}{\partial v'} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial u}{\partial v'} \right) f_u \times f_v$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u'} \\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix} f_u \times f_v$$

ただし，変換 $u = u(u', v'), v = v(u', v')$ のヤコビ行列式を

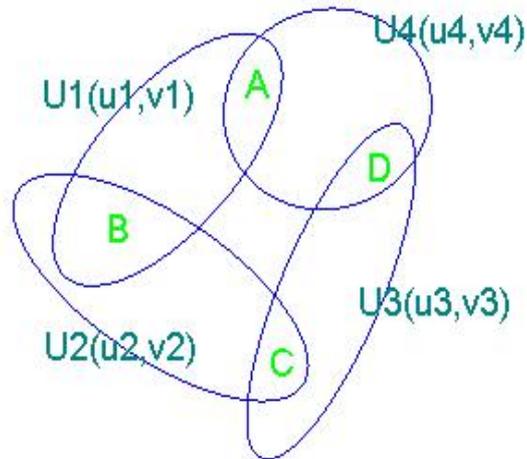
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u'} \\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix} \left(= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u'} \\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} \right)$$

と表している．

2つの座標 $f(u, v), g(u', v')$ の変換 $u = u(u', v'), v = v(u', v')$ のヤコビ行列式が正なら，法線ベクトル $f_u \times f_v, g_{u'} \times g_{v'}$ は同じ向きで，ヤコビ行列式が負なら反対向きであることが分かった．

ここで，曲面の向きについて述べる．曲面の向きを定めるとはいずれの面が表かを定めることです．局所的には必ず向きを決めることができる．実際曲面 S を $f(u, v)$ と媒介変数表示すれば，法線ベクトル $f_u \times f_v$ が向いた方を表と定める．さらに，曲面上のある点において法線ベクトルを定めれば，その点の周辺では，その法線ベクトルの先端を上に見てその点のまわりを左周り（反時計回り）に回るとき正の回転と定める．すなわち，曲面の向きを定めることは，曲面上の回転に正の回転，負の回転が定義できるということでもある．

このように局所的には必ず向きを決めることができるが，さらに矛盾なく全体の向きを定めることができるとき，その曲面を向きつけ可能といい，そうでない場合を向きつけ不可能という．矛盾なく全体の向きを定めることができるとは，たとえば，曲面 S が部分的に4つの媒介変



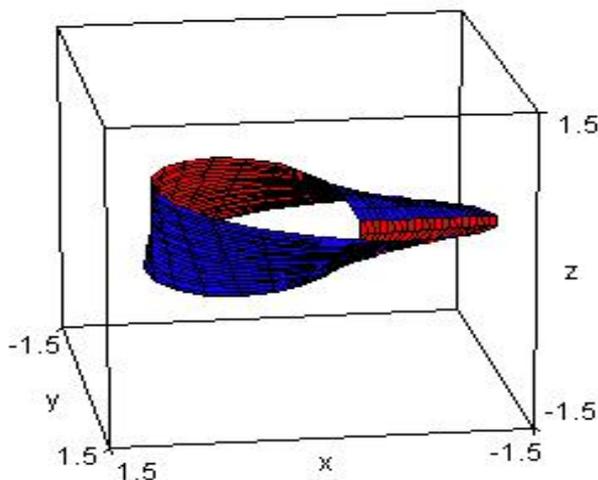
数表示 $\{U_1(u_1, v_1)\}, \{U_2(u_2, v_2)\}, \{U_3(u_3, v_3)\}, \{U_4(u_4, v_4)\}$ で表せたとき， U_1, U_2 の共通部分 B で $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ の向きを同じにする．すなわちヤコビ行列式が正ならそのまま，負なら u_2, v_2 を入れ替える， U_2, U_3 の共通部分， U_3, U_4 の共通部分でも同じことを繰り返し，それぞれの共通部分

で同じ向きにしたとき, U_4, U_1 の共通部分 A で (u_4, v_4) と (u_1, v_1) が同じ向きすなわちヤコビ行列式が正なら全体に矛盾なく向きを決められたことになります. このように行ったとき D では反対の向きになってしまう曲面があり, それは向きつけ不可能な曲面です.

例 (向きつけ不可能な曲面)

メビウスバンドで向きつけ不可能な曲面の説明をする. メビウスバンドとは, 長方形 $ABCD$ の辺 AB と, 辺 CD を 180° 回転させて重ねることにより得られる曲面です.

右図は, 縦 1 横 2π の長方形より得られるメビウスバンドです.



この曲面は, xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円上の点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ で円に垂直でかつ z 軸と $\frac{\theta}{2}$ だけ傾けた長さ 1 の線分により得られたものです. もちろん全体を 1 つの座標で表すことはできません. このメビウスバンドは次のように表示されます.

$$f(u, v) = \left(\cos u + v \sin \frac{u}{2} \cos u, \sin u + v \sin \frac{u}{2} \sin u, v \cos \frac{u}{2} \right)$$

ただし, $-\pi < u < \pi, -\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2}$

$v = 0$ 上で法線ベクトルを計算します.

$$f_u = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$f_v = \left(\sin \frac{u}{2} \cos u, \sin \frac{u}{2} \sin u, \cos \frac{u}{2} \right)$$

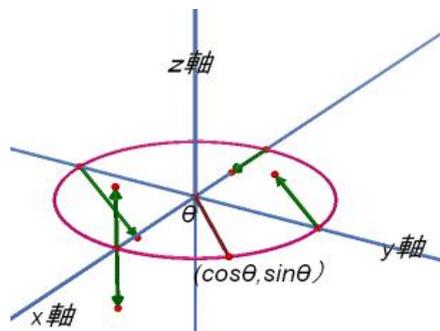
したがって, $(u, 0)$ における法ベクトルは

$$f_u \times f_v = \left(\cos u \cos \frac{u}{2}, \sin u \cos \frac{u}{2}, -\sin \frac{u}{2} \right)$$

$u = -\pi, \pi$ における法ベクトルを計算すると

と

$$u \rightarrow -\pi \text{ のとき } f_u \times f_v \rightarrow (0, 0, 1)$$



$u \rightarrow \pi$ のとき $f_u \times f_v \rightarrow (0, 0, -1)$

したがって、この曲面は向きつけ可能でないことが分かります。

今まで曲面 $S : f(u, v)$ の接ベクトル f_u, f_v をすでに扱ってきましたが、ここで接ベクトル、接ベクトル空間を定義します。もちろん曲面 S 上の点 P における接ベクトルとは P を始点とする S に接するベクトルのことで、点 P における接ベクトル空間は P における接平面のことです。議論を進めるためには定義をきちんとすることも大切です。

U を \mathbb{R}^2 内の開領域。

曲面 $S : f(u, v)$ とは微分可能な写像

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^3; (u, v) \mapsto f(u, v)$$

で定義されることはすでに述べたとおりです。

さて、曲面 S 上の任意の微分可能な曲線は、開領域 U で媒介変数表示された微分可能な曲線

$$(u(t), v(t))$$

を用いて

$$f(u(t), v(t))$$

と表せる。

定義

曲面 S 上の点 P を通る任意の微分可能な曲線の点 P における接ベクトルを曲面 S の点 P における接ベクトルという。

曲面 S の点 P における接ベクトルを求めよう。

まず、 u 曲線、 v 曲線の接ベクトルがそれぞれ f_u, f_v であるから、 f_u, f_v は接ベクトルである。

次に

$$f(u(0), v(0)) = P$$

のとき，すなわち S 上の曲線 $f(u(t), v(t))$ が $t = 0$ のとき点 P を通る．

このとき

$$\left. \frac{f(u(t), v(t))}{dt} \right|_{t=0} = f_u \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0} + f_v \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0} \cdots (\#)$$

この式は，接ベクトルは f_u, f_v の 1 次結合であることを意味している．

逆に，点 P における任意の接ベクトル $af_u + bf_v$ は開領域 U 上の直線

$$u = u_0 + at, v = v_0 + bt$$

考えれば

$$\left. \frac{f(u(t), v(t))}{dt} \right|_{t=0} = af_u + bf_v$$

である．

今考えている曲面は正則曲面，すなわち 2 つのベクトル f_u, f_v が 1 次独立である．したがって，曲面 S 上の点 P における接ベクトル全体は 2 次元のベクトル空間である．このベクトル空間を曲面 S の点 P における接ベクトル空間または接空間と呼び $T_P(S)$ と表す．2 つのベクトル f_u, f_v は接ベクトル空間 $T_P(S)$ の基底である．

上の (#) を見てみよう．曲面 S の接ベクトルは

$$f_u \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0} + f_v \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

と表せる．この式は，接ベクトルは

$$\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0}, \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

だけで決まることを意味している．

ここで，ベクトル

$$\left(\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0}, \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0} \right)$$

は U 上の曲線 $(u(t), v(t))$ の $t = 0$ における接ベクトルである．

U の $(u(0), v(0))$ における接ベクトルを (du, dv) と表し，曲面 S の接ベクトルを

$$df = f_u du + f_v dv \quad \cdots (b)$$

とあらわす．これが微分幾何の接ベクトルを表す方法です．(b) で du, dv は接ベクトル f_u, f_v の係数で，実数だと思えばよい．

曲面の接ベクトル $f_u du + f_v dv$ をその係数だけを取り (du, dv) と表します。この du, dv による表し方は最初違和感があるでしょうが、接ベクトルとは本来微小量 $(\Delta u, \Delta v)$ のことで、接方向は $\Delta v : \Delta u$ すなわち $\frac{\Delta v}{\Delta u}$ で決まります。これを $\frac{dv}{du}$ と表すことで、接ベクトルを $df = f_u du + f_v dv$ と表すことはとても合理的なことです。

準備が整いました。これから曲面の第1基本形式の解説をします。最初に述べましたが、曲面 $S : f(u, v)$ とは

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} f^1(u, v) \\ f^2(u, v) \\ f^3(u, v) \end{pmatrix}$$

のことで、 $f(u, v)$ は u, v のベクトル値関数です。本来 $\vec{f}(u, v)$ または \mathbf{f} は太字で表すべきなのであるが、ここでは $f(u, v)$ のように通常関数のように表記します。

曲面 S 上の点 $f(u, v)$ における任意の接ベクトルは

$$df = f_u du + f_v dv$$

と表せます。

ベクトル df の大きさの平方 $df \cdot df$ を曲面 $f(u, v)$ の第1基本形式といい I で表します。

$$I = df \cdot df = (f_u du + f_v dv) \cdot (f_u du + f_v dv)$$

$$= f_u \cdot f_u du^2 + f_u \cdot f_v dudv + f_v \cdot f_v dv^2$$

ここで、

$$E(u, v) = f_u \cdot f_u$$

$$F(u, v) = f_u \cdot f_v = f_v \cdot f_u$$

$$G(u, v) = f_v \cdot f_v$$

で E, F, G を定義し

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

となります。 E, F, G を第 1 基本形式の係数または第 1 基本量といいます。
 まず、第 1 基本形式が曲面 S の媒介変数の取り方によらないことを示す
 必要があります。

すなわち、 $g(u', v')$ を他の媒介変数とすると、第 1 基本形式 I が変らな
 いことを示す必要があります。

曲面 S に $f(u, v)$ 、 $g(u', v')$ と 2 つの媒介変数表示が与えられたとき、
 (u', v') に S 上の点 $g(u', v')$ と一致する $f(u, v)$ の (u, v) を対応させ、その
 対応を

$$u = u(u', v'), v = v(u', v')$$

とする。このとき、

$$g(u', v') = f(u(u', v'), v(u', v')) \cdots (1)$$

が成り立つ。ここで $df = f_u du + f_v dv$ と $dg = g_{u'} du' + g_{v'} dv'$ が一致す
 ることを証明すれば第 1 基本形式が座標の取り方によらないことが示される
 ことになる。

(1) より

$$g_{u'} = f_u \frac{\partial u}{\partial u'} + f_v \frac{\partial v}{\partial u'}$$

$$g_{v'} = f_u \frac{\partial u}{\partial v'} + f_v \frac{\partial v}{\partial v'}$$

一方

$$du = \frac{\partial u}{\partial u'} du' + \frac{\partial u}{\partial v'} dv'$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial u'} du' + \frac{\partial v}{\partial v'} dv'$$

この 2 つの関係式を用いれば

$$\begin{aligned} dg &= g_{u'} du' + g_{v'} dv' \\ &= \left(f_u \frac{\partial u}{\partial u'} + f_v \frac{\partial v}{\partial u'} \right) du' + \left(f_u \frac{\partial u}{\partial v'} + f_v \frac{\partial v}{\partial v'} \right) dv' \\ &= f_u \left(\frac{\partial u}{\partial u'} du' + \frac{\partial u}{\partial v'} dv' \right) + f_v \left(\frac{\partial v}{\partial u'} du' + \frac{\partial v}{\partial v'} dv' \right) = f_u du + f_v dv = df \end{aligned}$$

より $df = dg$ が示せ、座標の取り方によらないことが分かった。これより
 $df \cdot df$ で定義する第 1 基本形式が座標の取り方によらないことが示された。

なお，この計算の中で分かるように，座標を変えることにより f_u, f_v, du, dv のいずれも変化するが，お互い相殺しあい $f_u du + f_v dv$ は変化しないということ です．

第 1 基本形式

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

が座標の取り方に無関係であることが分かったが，係数（第 1 基本量） E, F, G が座標変換でどのような変化をするかは大切であるので，その計算をする．

写像

$$u = u(u', v'), v = v(u', v')$$

のヤコビ行列を J とおく．すなわち

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}$$

まず，すでに前頁で示した

$$\begin{pmatrix} g_{u'} \\ g_{v'} \end{pmatrix} = J^t \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} du' \\ dv' \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{u'} \\ g_{v'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{u'} & g_{v'} \end{pmatrix} = J^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J$$

を得る．成分で表すと

$$E' = E\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2 + 2F\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right) + G\left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right)^2$$

$$F' = E\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right) + F\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial v'}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right)\right\} + G\left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial v'}\right)$$

$$G' = E\left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right)^2 + 2F\left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial v'}\right) + G\left(\frac{\partial v}{\partial v'}\right)^2$$

となる．

さらに， $g_{u'}, g_{v'}$ と f_u, f_v および du, dv と du', dv' の関係式

$$\begin{pmatrix} f_{u'} \\ f_{v'} \end{pmatrix} = J^t \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix}$$

および

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} du' \\ dv' \end{pmatrix}$$

を用いて，第 1 基本形式を実際に計算すると，

$$\begin{aligned} & E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2 \\ &= \begin{pmatrix} du' & dv' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du' \\ dv' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} du' & dv' \end{pmatrix} J^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} du' \\ dv' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \end{aligned}$$

と第 1 基本形式が媒介変数の取り方によらないことの別証明が与えられた。

つぎに，曲面の面積を考えましょう。

微小部分の面積は，曲面と接ベクトル平面では同じと考えます。

接ベクトル平面上 2 つのベクトル f_u, f_v の決める平行四辺形の面積は $|f_u \times f_v|$ であり，

$$(f_u \times f_v) \cdot (f_u \times f_v) = (f_u \cdot f_u)(f_v \cdot f_v) - (f_u \cdot f_v)(f_v \cdot f_u) = EG - F^2$$

より， f_u, f_v の決める平行四辺形の面積は $\sqrt{EG - F^2}$ である。

$$f : D(\subset R^2) \longrightarrow R^3$$

で定義された曲面 S について， D を小さい長方形に分割し，横 Δu ，縦 Δv の長方形が $f_u \Delta u, f_v \Delta v$ の平行四辺形に写るから，面積は $\sqrt{EG - F^2}$ 倍である。したがって，曲面の S の面積は

$$\iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv$$

となる。ここで用いた $\sqrt{EG - F^2} dudv$ を $d\sigma$ と書き曲面 S の面積要素と

呼ぶ。曲面 f は 2 次元ユークリッド平面上 R^2 のゴムでできた領域を伸び縮み、湾曲させて、 R^3 内においたものが曲面であり、ゴムを細かく切ったときそれぞれの面積が $\sqrt{EG - F^2}$ 倍になっていると考えればよい。

座標変換で、 $\iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv$ がどう変るか調べよう。

$|J|$ をヤコビ行列式の絶対値とする。

$$E'G' - F'^2 = (EG - F^2)|J|^2$$

であり

$$du = \frac{\partial u}{\partial u'} du' + \frac{\partial u}{\partial v'} dv'$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial u'} du' + \frac{\partial v}{\partial v'} dv'$$

であるから、

$$\iint_{D'} \sqrt{E'G' - F'^2} du' dv' = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv$$

を得る。

第 1 基本形式は曲面上の接ベクトル df の大きさの平方を表す式です。2 つの接ベクトルの内積を計算します。曲面上で一般の 2 つの接ベクトルを用いるときは $df = f_u du + f_v dv$ ともう一つは du, dv が異なるだけですから $\delta f = f_u \delta u + f_v \delta v$ を用います。分かりづらければ、2 つのベクトルを $a f_u + b f_v$ と $c f_u + d f_v$ してもかまいません。

内積 $df \cdot \delta f$ は

$$df \cdot \delta f = (f_u du + f_v dv) \cdot (f_u \delta u + f_v \delta v)$$

$$= E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v$$

となります。もちろん、第 1 基本形式が与えられていれば、接ベクトルの大きさが分かるわけですから、

$$df \cdot \delta f = \frac{(df + \delta f) \cdot (df + \delta f) - df \cdot df - \delta f \cdot \delta f}{2}$$

より計算しても当然同じ答えになります。

2 つの接ベクトル

$$df = f_u du + f_v dv, \delta f = f_u \delta u + f_v \delta v$$

のなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}$$

となります。

さて、以上で第 1 基本形式の解説は終わりです。

曲面に第 1 基本形式を与えれば何が分かるかを調べましょう。

曲面の媒介変数表示

$$f : U(\subset \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

上の曲線の長さを考えましょう。

曲面 f 上の曲線は、 U 上の曲線 $u = u(t), v = v(t)$ ($a \leq b$) を用いて、

$f(u(t), v(t))$ と表せる。この曲線の接ベクトルは

$$\frac{df(u(t), v(t))}{dt} = f_u \frac{du}{dt} + f_v \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \left| \frac{df(u(t), v(t))}{dt} \right| = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

したがって、曲線の長さ l は、

$$l = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt$$

で与えられます。この式を見れば分かるように、 E, F, G の値と、 $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$ の値だけで、曲線の長さが求められることが分かります。これは f がどのような関数であるかは関係ないということです。曲面上の 2 つのベクトルのなす角や曲面上の面積も同じです。このように、曲面

$$f : U(\subset \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

とは \mathbb{R}^2 上の領域 U をゴムでできたものと思い、伸び縮み湾曲させて \mathbb{R}^3 内においたものです。さらに、曲面 f に第 1 基本形式 $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ が定まるということは、領域 U 上の各点に $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$ を定めるということです。すなわち $f(u, v)$ の式は関係ないので、曲

面を第 1 基本形式をだけを用いて調べようということは， U の各点に $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$ を定義した R^2 内でいろいろな性質を調べようという態度です．たとえば，曲面上の 2 点を与えたとき，この 2 点を結ぶ最短距離を与える曲線を調べることは，研究対象の 1 つです．

さて，曲面は第 1 基本形式だけで十分調べ尽くされるのでしょうか．それほど単純ではありません．

円柱面と平面を比べます．

底面が半径 1 の円である円柱面は

$$f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

です．

$$f_u = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$f_v = (0, 0, 1)$$

より

$$E = f_u \cdot f_u = 1, F = f_u \cdot f_v = 0, G = f_v \cdot f_v = 1$$

となる．一方平面は

$$f(u, v) = (u, v, 0)$$

より，

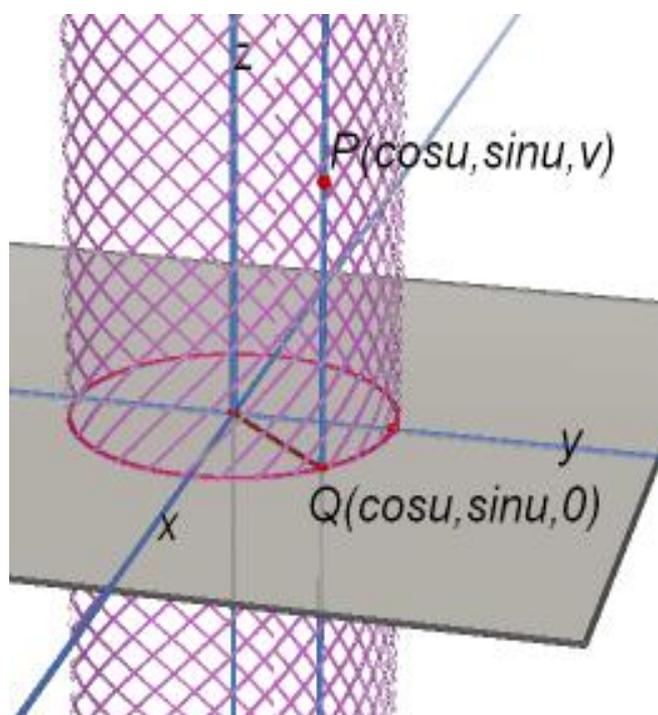
$$f_u = (1, 0, 0)$$

$$f_v = (0, 1, 0)$$

より

$$E = f_u \cdot f_u = 1, F = f_u \cdot f_v = 0, G = f_v \cdot f_v = 1$$

で，円柱面と平面の第 1 基本形式は同じです．ですから，曲面上の曲線の長さ，角，面積は変わりません．円柱面は平面の一部をぐるっと丸めただけですから分かりやすいでしょう．しかし，円柱面を底面と平行な平面で切ったときの切り口である円を考えましょう．この円は円柱を切り開いて平面の



一部とすると線分になります。すなわち，曲線の曲率は異なってきます。円柱上の円柱螺旋を考えれば分かるように，捩率も変わってくるのが分かります。

円柱上で生活していると仮定するならば，底面と平行な平面で切った切り口の円を動いている生き物は，まっすぐ進んでいると思います。進んでいるところが円であることは外から見ると分かる内容です。第1基本形式だけで考えると，この円は平面上の直線と同じものと考えます。このように，第1基本形式だけで幾何学をするということは，曲面上だけの情報だけで幾何学を行うという態度でそれを内在幾何 (Intrinsic geometry) といいます。もちろん，曲面を外部から見て調べようという立場もあり，そのときは円柱面と平面は区別されます。それが，次の章で学ぶ第2基本形式です。