

# 不等式の図形への応用

数学オリンピック等で出題された問題を有名不等式を用いて見つめなおすことを別のファイルで行いますが、その前に、有名不等式について慣れる必要があります。図形の最大最小の問題に不等式の性質を利用することはそのためのとても有効な題材です。

本題に入る前にまずよく用いる不等式とその応用をまとめておきます。なお、定理の証明は有名不等式のファイルをご覧ください。

## 1. 算術—幾何—調和平均不等式

$$\frac{\overset{n}{\text{---}}}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

等号が成り立つのはどちらも  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  のとき。

より

### 応用①

$x, y > 0$  である。

$x + y = (\text{一定})$  のとき  $xy$  は  $x = y$  のとき最小値をとる。

$xy = (\text{一定})$  のとき  $x + y$  は  $x = y$  のとき最大値をとる。

### 応用②

$$\left( \frac{\frac{x}{n} + \dots + \frac{x}{n} + \frac{y}{m} + \dots + \frac{y}{m}}{n+m} \right)^{n+m} \geq \left( \frac{x}{n} \right)^n \left( \frac{y}{m} \right)^m$$

より  $\left( \frac{x+y}{n+m} \right)^{n+m} \geq \frac{x^n}{n^n} \cdot \frac{y^m}{m^m}$

したがって、

$x + y = (\text{一定})$  のとき  $x^n \cdot y^m$  は  $\frac{x}{n} = \frac{y}{m}$  のとき最大値をとり

$x^n \cdot y^m = (\text{一定})$  のとき  $x + y$  は  $\frac{x}{n} = \frac{y}{m}$  のとき最小値をとる。

例  $x > 0$  における  $x^n + \frac{1}{x^m}$  が最小値をとる場合を調べよう。

$(x^n)^m \cdot \left( \frac{1}{x^m} \right)^n = 1$  を利用する。

$$x^n + \frac{1}{x^m} = m \cdot \frac{x^n}{m} + n \cdot \frac{1}{n x^m} \quad \text{と変形し}$$

$$\geq (m+n) \cdot \left\{ \left(\frac{x^n}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{n x^m}\right)^n \right\}^{1/(m+n)} = (\text{一定})$$

したがって、 $x^n + \frac{1}{x^m}$  が最小値をとるのは

$$\frac{x^n}{m} = \frac{1}{n x^m}$$

すなわち、

$$x^{m+n} = \frac{m}{n}$$

のときである。

例  $x^2 + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}$

$$\geq 3 \left\{ x^2 \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^2 \right\}^{1/3} = 3 (1/4)^{1/3}$$

等号が成り立つのは  $x^2 = \frac{1}{2x} \quad \therefore x = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$

応用③ 算術平均と調和平均関係に  $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$  ( $x, y, z > 0$ ) ( $x, y, z > 0$ ) を代入して

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3} \geq \frac{3}{x + y + z} \quad \dots \textcircled{1}$$

等号が成り立つのは  $x = y = z$  のとき

したがって、 $x + y + z = (\text{一定})$  のときに  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  は  $x = y = z$  のとき最小値をとる。

例  $x > 0, y > 0, z > 0$  のとき①より

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{9}{2(x+y+z)} \quad \dots \textcircled{2}$$

②の両辺に  $x + y + z$  をかけ、両辺から 3 を引くことにより、次の不等式を得る。

$$\frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} \geq \frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。ただし、等号が成り立つのは  $x = y = z$  のとき。

このように逆数の和の不等式には算術-調和平均不等式が役に立つことが多い。

## 2. コーシーシュワルツの不等式

定理  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  を実数とする. このとき

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

が成り立つ. 等号が成り立つのは  $x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = \dots = x_n : y_n$  のとき.

### 応用①

$x + y + z = 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z$  と考え

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

を得る. 等号が成り立つのは  $x : y : z = 1 : 1 : 1$  すなわち  $x = y = z$  のとき.

### 応用② $x, y, z > 0$ のとき

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq \left(\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 = 9$$

等号が成り立つのは  $\sqrt{x} : \sqrt{y} : \sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{y}} : \frac{1}{\sqrt{z}}$  より  $x = y = z$  のとき.

この不等式は算術-調和平均不等式よりえた不等式でもある.

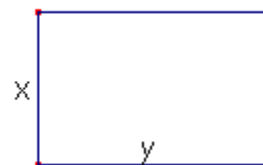
以上の内容を踏まえて, 図形の最大最小の問題を不等式を利用して解決しよう.

例題 1 面積一定の長方形で周の長さが最小となるのは正方形で, 周の長さ一定の長方形で面積が最大になるのは正方形である.

解 縦を  $x$ , 横を  $y$  とする.

$$\frac{xy}{2} \geq \sqrt{xy}$$

より成り立つ.



例題 2 面積一定の直角三角形で周の長さが最小になるのは直角二等辺三角形である.

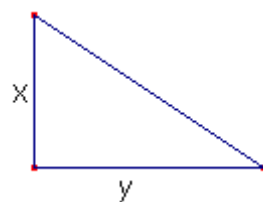
解 直角をはさむ 2 辺の長さを  $x, y$  とすると, 直角三角形の周の長さは

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

面積一定より  $xy = (\text{一定})$ .  $xy = (\text{一定})$  のとき

$x + y, \sqrt{x^2 + y^2}$  は  $x = y$  のとき同時に最小値をとるから, 周の長さが最小になるのは直角二等辺三角形のときである.

なお,  $x^2 + y^2$  の最小値は平方平均と算術平均の関係よりとしてもよいし, 直接行こうなら



$$2(x^2 + y^2) = (x + y)^2 + (x - y)^2$$

より、 $x = y$  のとき最小値をとるとしてもよい。

例題3 周の長さが一定の三角形のうち面積最大の三角形は正三角形である。

解 三角形の3辺の長さを  $a, b, c$ ,  $s = \frac{a + b + c}{3}$  とおく。

ヘロンの公式より三角形の面積  $S$  は

$$S^2 = (s - a)(s - b)(s - c)s$$

である。したがって、 $(s - a)(s - b)(s - c)$  が最小になる場合を求めればよい。

ここで  $(s - a) + (s - b) + (s - c) = s = (\text{一定})$  より

$s - a = s - b = s - c$  すなわち  $a = b = c$  (正三角形) のとき面積は最大になる。

つぎに、三角形と与えられた三角形の3本の中線が3辺である三角形の関係について調べよう。三角形は3辺の長さが与えられると定まるので、右の図で、 $\triangle ABC$  と3辺が  $AD, BE, CF$  である三角形の関係を調べようということです。

3本の中線が3辺である三角形は扱いづらそうですが、右図で  $G$  を重心とし、 $BG$  の中点を  $K$  とすれば、 $\triangle GKD$  が

求める三角形と相似比  $\frac{1}{3}$  の相似な三角形です。

なお、 $\triangle GKD = \frac{1}{12} \triangle ABC$  ですから

$\triangle ABC$  と3本の中線が3辺である三角形の面積比は

$$1 : \frac{9}{12} = 4 : 3$$

です。

以上の考えを利用すれば次の性質が成り立つことが分かります。

例題4 3本の中線の和が一定である三角形のうち、面積が最大なのは正三角形である。

解 右上の図で中線の和が一定より  $AD + BE + CF$  の値が一定です。

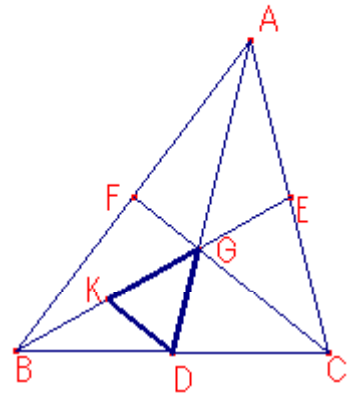
$\triangle GKD = \frac{1}{12} \triangle ABC$  より

$\triangle ABC$  の面積が最大  $\Leftrightarrow \triangle GKD$  の面積が最大

$\triangle GKD$  で周の長さが一定ですから、 $\triangle GKD$  は正三角形のとき面積は最大になる。

$GK = KD = DG$  より  $GA = GB = GC$

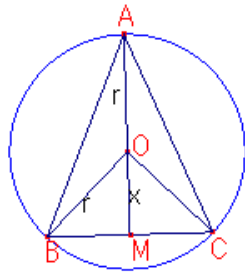
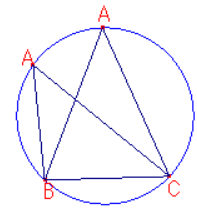
このとき、 $\triangle ABC$  の外心と重心が一致するので  $\triangle ABC$  は正三角形である。



例題5 半径  $r$  の円に内接する三角形のうち面積最大のものは正三角形である.

解 円に内接する  $\triangle ABC$  で頂点  $B, C$  を固定すれば,  $AB = AC$

のとき面積最大になる (右図). したがって,  
 $AB = AC$  の二等辺三角形のとき調べればよい.



辺  $BC$  の中点を  $M$  とすれば,  $\triangle ABC$  の面積  $S$  は

$$S = \sqrt{r^2 - x^2} (r + x)$$

$$\therefore S^2 = (r - x) (r + x)^3$$

したがって,  $r - x, \frac{r+x}{3}, \frac{r+x}{3}, \frac{r+x}{3}$  に算術-幾何平均不等式をもち

いて,

$$r - x = \frac{r+x}{3} \quad \therefore r = 2x$$

したがって, 面積最大になるのは正三角形である.

例題6 円に内接する三角形のうち, 周の長さが最大のものは正三角形である.

解 外接円の半径を  $R$  とする.  $\triangle ABC$  の周の長さは

$$2R (\sin A + \sin B + \sin C)$$

である.

$$\sin A + \sin B + \sin C / 3 \leq \sin(A+B+C) / 3$$

等号が成り立つのは  $A = B = C$  のときであるから題意が成り立つ.

注意  $0 \leq A, B, C \leq \pi, A+B+C = \pi$  のとき

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin \frac{A+B+C}{3}$$

が成り立つことは第1章で扱っている. ここでは, 別証明を与えよう.

証明  $A \leq B \leq C$  とする.  $A+B+C = \pi$  より

$$A \leq \frac{\pi}{3} \leq C$$

となる. 等号の場合の吟味がやあ面倒なので, ここでは次の2つの場合に分けて調べる.

(i)  $A, B, C$  がすべて等しいわけではないとき, すなわち  $A < \pi/3 < C$  のとき

$$\sin A + \sin C = 2 \sin \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{A-C}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

および  $A \leq A + C - \frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{3} \leq C$  より

$$C - A > \left| \left( A + C - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\pi}{3} \right| \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立ちます. ここで,

$$A' = \frac{\pi}{3}, \quad B' = B, \quad C' = A + C - \frac{\pi}{3}$$

とおくと, ②より

$$C - A > |C' - A'|$$

さらに,  $A' + C' = A + C$  及び①より

$$\sin A + \sin C < \sin A' + \sin C'$$

$\therefore \sin A + \sin B + \sin C < \sin A' + \sin B' + \sin C'$

$$= \sin \frac{\pi}{3} + \sin B + \sin \left( A + C - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} + 2 \sin \left( \frac{A + B + C - \frac{\pi}{3}}{2} \right) \cdot \cos \frac{B - \left( A + C - \frac{\pi}{3} \right)}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

最後の不等号で等号が成り立つのは

$$B = A + C - \frac{\pi}{3} = (\pi - B) - \frac{\pi}{3} \quad \therefore B = \frac{\pi}{3}$$

$$(ii) \quad A = B = C \text{ のとき } \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

この証明法を磨光法という. 詳しくは磨光法の項目を参考にしていきたい.  
微分を学んでいれば次のほうが分かりやすい.

$f(x) = \sin x$  とおく.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\alpha)}{2}(x-a)^2$$

より,  $0 < x < \pi$   $a = \frac{\pi}{3}$  で考えれば  $f''(\alpha) < 0$  より

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a)$$

$x$  に  $A, B, C$  を代入し  $\frac{1}{3}$  倍して加えれば

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin \frac{A+B+C}{3}$$

を得る. 等号が成り立つのは  $A=B=C=\frac{\pi}{3}$  のとき.

この証明方法は関数の凸性を利用する方法といわれ, 多くの不等式の証明に利用されている.

例題6  $\angle XOY$ の辺  $OX$ ,  $OY$ 上にそれぞれ点  $P$ ,  $Q$ を取る.

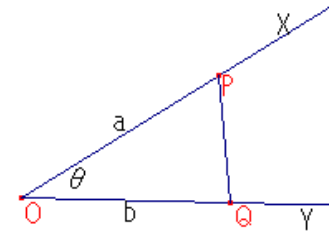
$\triangle OPQ$ の面積が一定であるように  $P$ ,  $Q$ を動かすとき, 線分  $PQ$ の長さを最小にするのは  $OP=OQ$ のときである.

解  $OP=a$ ,  $OQ=b$ ,  $\angle XOY=\theta$ とおく. このとき

$ab \sin \theta$ が一定より  $ab$ が一定. 一方

$$PQ^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

より,  $a=b$ のとき  $PQ^2$ は最小値をとる.



例題6 原点を中心とする円上の点  $P$ における接線と  $x$ 軸,  $y$ 軸との交点をそれぞれ  $A$ ,  $B$ とする.

このとき, 線分  $AB$ の長さを最小にするのは  $OA=OB$ のときである.

解  $OA=a$ ,  $OB=b$ ,  $OP=r$ ,  $\angle AOP=\theta$ とおく.

このとき,

$$a \cos \theta = r, \quad b \sin \theta = r \text{ より}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{r}{b}\right)^2 = 1$$

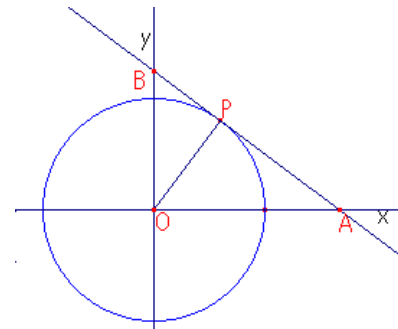
$$\therefore \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{r}\right)^2 = (\text{一定})$$

一方,  $ab = AB \cdot r$ より

$AB$ の長さが最小  $\Leftrightarrow ab$ が最小  $\Leftrightarrow a^2 b^2$ が最小

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2 b^2} \text{が最大}$$

したがって,  $\left(\frac{1}{a}\right)^2 = \left(\frac{1}{b}\right)^2$ より  $a=b$ すなわち  $OA=OB$ のとき  $AB$ の長さは最小になる.



例題6を楕円の場合に拡張すると次の問題になる.

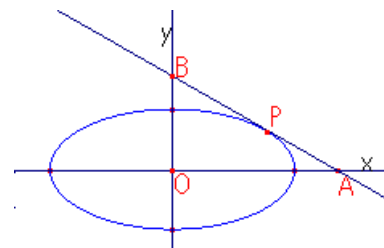
例題7 楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点  $P$ における接線と  $x$ 軸,  $y$ 軸との交点をそれぞれ  $A$ ,  $B$ とする. こ

のとき, 線分  $AB$ の長さの最小値を求めよ.

解  $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ とおく.

$P$ における接線の式は

$$\frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} = 1$$



であるから  $A \left( \frac{a}{\cos \theta}, 0 \right)$ ,  $B \left( 0, \frac{b}{\sin \theta} \right)$

$$\begin{aligned} AB^2 &= \left( \frac{a}{\cos \theta} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sin \theta} \right)^2 \\ &= \left\{ \left( \frac{a}{\cos \theta} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sin \theta} \right)^2 \right\} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= a^2 + b^2 + \left( \frac{a \sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 + \left( \frac{b \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \\ &\geq a^2 + b^2 + 2 a b = (a + b)^2 \end{aligned}$$

等号が成り立つのは

$$\frac{a \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b \cos \theta}{\sin \theta} \quad \therefore \tan^2 \theta = \frac{b}{a}$$

したがって、 $AB$ の最小値は  $a + b$  である。

例題 8  $\angle XOY$ 内に 1 点  $P$  が与えられている、 $P$  を通る直線と半直線  $OX$ ,  $OY$  との交点をそれぞれ  $A$ ,  $B$  とする。  $\triangle OAB$  の面積を最小にするには  $A$ ,  $B$  をどのようにとればよいか。

解  $P$  を通り、 $OY$ ,  $OX$  に平行な直線を引き、 $OX$ ,  $OY$  との交点をそれぞれ  $A'$ ,  $B'$  とし、

$OA = x$ ,  $OB = y$ ,  $OA' = a$ ,  $OB' = b$ ,

$\angle XOY = \theta$  とおく。  $\triangle AOB$  の面積に注目し、

$$x y \sin \theta = 2 a b \sin \theta + (x - a) b \sin \theta + a (y - b) \sin \theta$$

$$\therefore x y = b x + a y \quad \therefore \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$$

$\triangle OAB$  の面積を最小にするには  $x y$  を最小にすればよい。したがって  $\frac{1}{xy}$  を最大にすればよい。

$$\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} \leq \left( \frac{\frac{a}{x} + \frac{b}{y}}{2} \right)^2 = (\text{一定})$$

したがって、 $x y$  は  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{1}{2}$  のときすなわち  $x = 2 a$ ,  $y = 2 b$  のとき最大値をとる。

ここまでの問題と少し雰囲気異なるが次の性質も算術—幾何平均不等式を用いて証明できる。

例題 9 三角形の内接円の半径を  $r$ , 外接円の半径を  $R$  とすると

$$R \geq 2 r$$

が成り立つ。ただし、等号が成り立つのは正三角形のとき。

証明  $\triangle ABC$  の 3 辺の長さを  $a$ ,  $b$ ,  $c$  とすると、2 辺の和は他の 1 辺より大きいから



$$b + c - a > 0, \quad c + a - b > 0, \quad a + b - c > 0$$

したがって、算術-幾何平均不等式より

$$(b + c - a) + (c + a - b) \geq 2\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}$$

$$\therefore c \geq \sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}$$

等号が成り立つのは  $b + c - a = c + a - b$  すなわち  $a = b$  のとき

$$\text{同様に } a \geq \sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}, \quad b \geq \sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}$$

辺々かけることにより

$$a b c \geq (b + c - a) (c + a - b) (a + b - c) \quad \dots \textcircled{1}$$

等号が成り立つのは  $a = b = c$  のとき.

ここで  $s = \frac{a+b+c}{2}$  とおくとヘロンの公式より  $\triangle ABC$  の面積  $S$  は

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

と表せる. したがって

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{S^2}{s}$$

$$\text{さらに, } S = \frac{1}{2} b c \sin A = \frac{abc}{4R} \quad \text{より} \quad a b c = 4 R S$$

したがって, ①より

$$4 R S = a b c \geq 8 (s-a)(s-b)(s-c) = \frac{8S^2}{s}$$

さらに  $S = s r$  であるから

$$R \geq \frac{2S}{s} = 2 r \quad \dots \textcircled{2}$$

証明の中の不等式でいずれの場合も等号が成り立つのは正三角形のときであるから, ②で等号が成り立つのは正三角形のときである.

例題 9 は次のように証明することも出来る.

例題 9 の別証明

$\triangle ABC$  の面積, 周の長さをそれぞれ  $S, L$  とすれば, 例題 3 より

$$S \leq \left(1 \text{ 辺が } \frac{L}{3} \text{ の正三角形の面積} \right) \leq \frac{\sqrt{3} L^2}{36}$$

一方  $r L = 2 S$  であるから

$$r \leq \frac{\sqrt{3} L}{18} \quad \dots \textcircled{1}$$

例題 6 より, 円に内接する三角形のうち周の長さが最大のものは正三角形であり, 半径  $R$  の円に内接する正三角形の 1 辺の長さ  $a$  は

$$a = 2 R \sin 60^\circ = \sqrt{3} R$$

$$\therefore L \leq 3 \sqrt{3} R \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より  $2r \leq R$  を得る.

## 2. 空間図形への不等式の応用

例題1 半径  $r$  の球に内接する直円錐の体積が最大になる場合を調べよ.

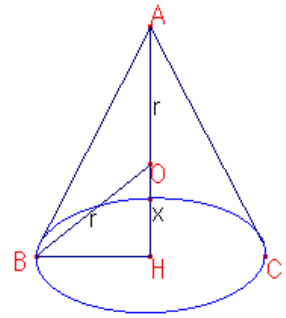
解 球の中心を  $O$ ,  $O$  と直円錐の底面との距離を  $x$  とする.

$$\begin{aligned} 3 \text{ (直円錐の体積)} &= \pi (r^2 - x^2) (r + x) \\ &= \pi (r - x) (r + x) \cdot 2 \end{aligned}$$

$$(r - x) (r + x) = (r - x) + \frac{r+x}{2} + \frac{r+x}{2} = (\text{一定})$$

より  $r - x = \frac{r+x}{2}$  すなわち  $x = \frac{r}{3}$  のとき直円錐の

体積が最大になる.



例題2 半径  $r$  の球に内接する直円柱の体積が最大になる場合を調べよ

解 球の中心  $O$  から底面に下した垂線の足を  $H$  とし,  $OH = x$  とおく.

球に内接する円柱の体積を  $V$  とおくと

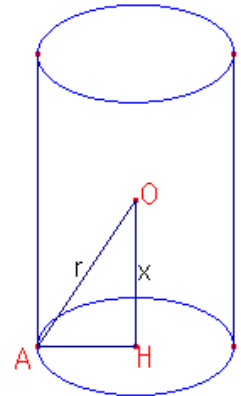
$$\begin{aligned} V &= \pi (r^2 - x^2) \cdot 2x \\ &= 2\pi \cdot (r^2 - x^2) \cdot x \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$(r^2 - x^2) \cdot x > 0$  であるから,  $(r^2 - x^2) \cdot x$  と  $(r^2 - x^2)^2 \cdot x^2$  が最大になる  $x$  の値は一致する.

$$(r^2 - x^2) + x^2 = \frac{r^2 - x^2}{2} + \frac{r^2 - x^2}{2} + x^2 = (\text{一定})$$

より  $\frac{r^2 - x^2}{2} = x^2$  すなわち  $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$  のとき, 円柱の体積は最大に

なる.



別解  $V = 2\pi \cdot (r^2 - x^2) \cdot x = 2\pi \cdot (r + x) (r - x) x$   
はこのままではうまくいかない. 実際

$$\frac{r+x}{2} + \frac{x}{2} + (r-x) = (\text{定数})$$

であるが,

$$\frac{r+x}{2} = \frac{x}{2} = (r-x)$$

を満たす  $x$  は存在しない.

そこで次のように変形して考える.

$$a(r+x) + bx + (r-x) = (\text{定数}) \quad \dots \textcircled{2}$$

かつ

$$a(r+x) = bx = r-x \quad \dots \textcircled{3}$$

を満たす  $x$  が存在する定数  $a, b$  をまず求める.

②より  $a+b=1$  さらに③より

$$a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$a > 0 \text{ より } a = 2 - \sqrt{3}, \quad b = \sqrt{3} - 1$$

さらに③より

$$x = \frac{r}{2-a} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

例題3 直円錐が与えられている. 底面が与えられた直円錐の底面上にある円柱のうち, 体積が最大のを求めよ.

解 与えられた直円錐の底面の半径を  $a$ , 高さを  $h$ , 円柱の底面の半径を  $x$  とする. このとき, 円柱の高さを  $h'$  とすると,  $\triangle ABH$  に注目することより

$$a : h = a - x : h' \quad \therefore h' = \frac{h(a-x)}{a}$$

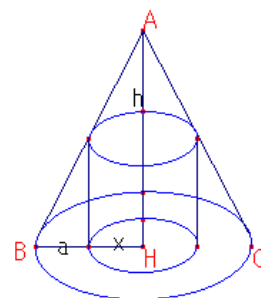
円柱の体積を  $V$  とおくと

$$V = \frac{\pi hx^2(a-x)}{a}$$

したがって,  $V$  は

$$\frac{x}{2} = a - x$$

すなわち  $x = \frac{2a}{3}$  のとき最大になる.



例題4 半径  $r$  の球に外接する直円錐のうち体積最小の場合を調べよ.

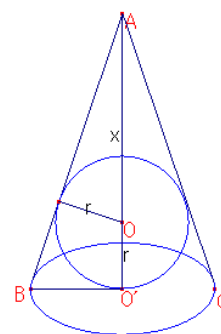
解 右の図で  $AO = x$  とおく. 相似の性質より

$$r : \sqrt{x^2 - r^2} = BO' : (x+r)$$

$$\therefore BO' = \frac{r(x+r)}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

直円錐の体積を  $V$  とおくと

$$V = \frac{\pi r^2(x+r)^2}{3(x-r)}$$



ここで

$$\frac{(x+r)^2}{x-r} = \frac{(x-r)(x+3r)+4r^2}{x-r} = 4r + (x-r) + \frac{4r^2}{x-r}$$

したがって、 $(x-r) = \frac{4r^2}{x-r}$  すなわち  $x = 3r$  のとき直円錐の体積は最小になる。

例題5 表面積一定の直方体のうち体積最大になる場合を調べよ。

解 直方体の縦、横、高さの長さをそれぞれ  $x$ 、 $y$ 、 $z$  とする。このとき、表面積が一定より

$$xy + yz + zx = (\text{一定})$$

ここで

$$xy \cdot yz \cdot zx = (xyz)^2$$

より、 $xy = yz = zx$  すなわち  $x = y = z$  のとき体積が最大になる。

### 3. 不等式の応用と3線座標

この節では、いくつかの例題を扱ってから3線座標について解説する。

例題1 点Pは $\triangle ABC$ の内部の点とする。点Pと辺BC、CA、ABとの距離をそれぞれ  $x$ 、 $y$ 、 $z$  とするとき積  $xyz$  を最大にする点Pを求めよ。

解  $BC = a$ 、 $CA = b$ 、 $AB = c$  とすると、

$$ax + by + cz = 2S = (\text{一定})$$

および

$$(ax)(by)(cz) \leq \left(\frac{ax+by+cz}{3}\right)^3 = (\text{一定})$$

より  $xyz$  は  $ax = by = cz$  すなわち

$$x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} \quad \dots \textcircled{1}$$

のとき最大になる。

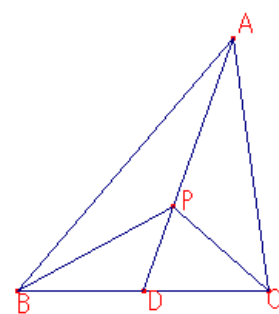
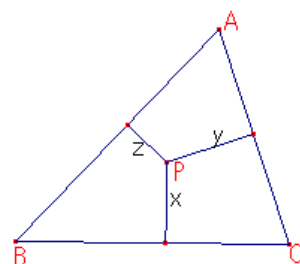
①を満たす点Pを求めよう。

$$ax = by = cz \quad \text{であるから} \triangle PAB = \triangle PCA$$

したがって、APの延長とBCとの交点をDとすると

$$BD = DC$$

他も同様で、点Pは $\triangle ABC$ の重心であることが分かった。



例題2 点Pは $\triangle ABC$ の内部の点とする。点Pと辺BC、CA、ABとの距離をそれぞれ  $x$ 、 $y$ 、

z とするとき和  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$  を最小にする点 P を求めよ.

解 次の変形は驚くかもしれないが、コーシーシュワルツの不等式を用いるときよく使う変形である.

$$a = \sqrt{ax} \sqrt{\frac{a}{x}}, \quad b = \sqrt{by} \sqrt{\frac{b}{y}}, \quad c = \sqrt{cz} \sqrt{\frac{c}{z}}$$

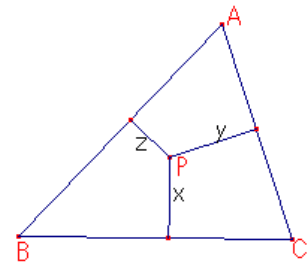
と変形すれば

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= \left( \sqrt{ax} \sqrt{\frac{a}{x}} + \sqrt{by} \sqrt{\frac{b}{y}} + \sqrt{cz} \sqrt{\frac{c}{z}} \right)^2 \\ &\geq (ax + by + cz) \left( \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) \end{aligned}$$

であり,  $ax + by + cz = (\text{一定})$  であるから,  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$  は

$$\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\frac{a}{x}}} = \frac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\frac{c}{z}}} = \frac{\sqrt{by}}{\sqrt{\frac{b}{y}}} \quad \text{すなわち} \quad x = y = z \quad \text{のとき最小になる.}$$

$x = y = z$  のとき点 P は  $\triangle ABC$  の内心である.



例題3 点 P は  $\triangle ABC$  の内部の点とする. 点 P と辺 BC, CA, AB との距離をそれぞれ x, y, z とするとき和  $x^2 + y^2 + z^2$  を最小にする点 P を求めよ.

解  $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$

より  $x^2 + y^2 + z^2$  は

$$x : y : z = a : b : c \quad \dots \textcircled{1}$$

のとき最小になる.

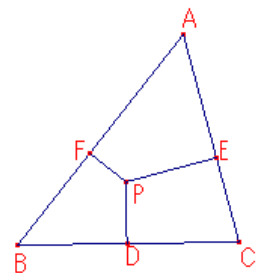
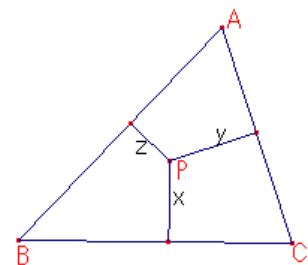
さて, ①を満たす点 P が  $\triangle ABC$  のどの点であるかを調べるのはそれほど簡単ではない.

ここでは, 標題の三線座標を利用して点 P の位置を調べよう.

$\triangle ABC$  が与えられているとき, 点 P から各辺 BC, CA, AB に垂線を下ろしその足をそれぞれ D, E, F とする. ここで, 点 P が定まれば連比

$$PD : PE : PF$$

が定まる. 実際は PD について, P が辺 BC に関して A と同じ側にあるとき正, 反対側にあるとき負として符号も考えるのであるが, ここでは三角形の内部の点 P に関して考えるので, PD, PE, PF は正のとして扱う.



例題 1 より  $\triangle ABC$  の重心  $G$  は

$$GD : GE : GF = \frac{1}{BC} : \frac{1}{CA} : \frac{1}{AB}$$

であり, 例題 2 より  $\triangle ABC$  の内心  $I$  は

$$ID : IE : IF = 1 : 1 : 1$$

である.

$\triangle ABC$  の内部の点  $P$  が与えられれば

$$PD : PE : PF$$

が定まるが, 逆に

$$PD : PE : PF = \alpha : \beta : \gamma$$

が与えられたとき点  $P$  が 1 つに定まるかは自明ではない. 証明は次のように行う.

$\triangle ABC$  の内部の点  $P$  に対して,  $P$  から辺  $BC$ ,  $CA$  に下した垂線の足をそれぞれ  $D$ ,  $E$  とする. 4 点  $P$ ,  $D$ ,  $C$ ,  $E$  は円に内接するから,

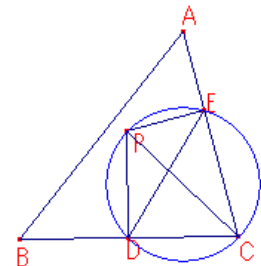
$$\angle DPE = (\angle C \text{ の補角}) = (\text{一定})$$

したがって,  $PD : PE$  が一定なら  $\triangle PDE$  は相似. さらに

$$\angle PCD = \angle PFD$$

より,  $\angle PCD$  は一定である.

すなわち,  $PD : PE$  が一定である点  $P$  の軌跡は頂点  $C$  を通る直線である.



ゆえに,  $PD : PE : PF$  が一定なら,  $PD : PE$  が一定かつ  $PE : PF$  が一定より, 点  $P$  は定点である.

定義 点  $P$  から  $\triangle ABC$  の各辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  に下した垂線の長さを  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  とするとき連比  $\alpha : \beta : \gamma$  を点  $P$  の 3 線座標といい  $P(\alpha, \beta, \gamma)$  と表す.

例題 1 より  $\triangle ABC$  の重心  $G$  の 3 線座標は  $G\left(\frac{1}{BC}, \frac{1}{CA}, \frac{1}{AB}\right)$  であり内心  $I$  の重心座標は

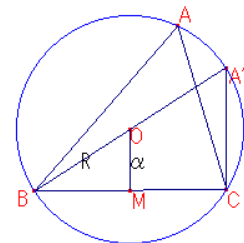
$I(1, 1, 1)$  である.

また, 外心  $O$  は右の図より

$$\alpha : \beta : \gamma = R \cos A : R \cos B : R \cos C$$

$$= \cos A : \cos B : \cos C$$

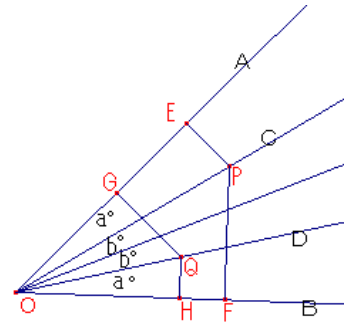
$$\therefore O(\cos A, \cos B, \cos C)$$



定義  $\angle AOB$  内の 2 本の半直線  $OC$ ,  $OD$  が  $\angle AOB$  の 2 等分線に関して対称おなら  $OC$ ,  $OD$

の片方をもう一方の $\angle AOB$ の等角共役線という。

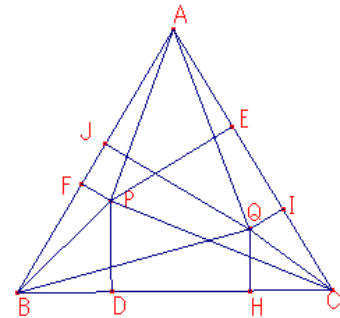
半直線 $OC$ ,  $OD$ が $\angle AOB$ の等角共役線の時、  
 $OC$ 上に点 $P$ ,  $OD$ 上に点 $Q$ をとり、 $P$ から $OA$ ,  $OB$ に下した  
 垂線の足をそれぞれ $E$ ,  $F$ ,  $Q$ から $OA$ ,  $OB$ に下した垂線の足  
 をそれぞれ $G$ ,  $H$ とすると $QG : QH = \frac{1}{PE} : \frac{1}{PF}$



したがって、次の命題が成り立つ。

命題  $\triangle ABC$ 内に1点 $P$ がある。このとき、 $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$ のそれぞれ $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$ の等角共役線は1点で交わる。

証明 点 $P$ の三線座標を $P(\alpha, \beta, \gamma)$ とし、 $P$ から3辺  
 $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ に下した垂線の足をそれぞれ $D$ ,  $E$ ,  $F$ とする。



$BP$ ,  $CP$ のそれぞれ $\angle B$ ,  $\angle C$ の等角共役線の交点を $Q$ とし、 $Q$ より辺 $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ に下して垂線の足を $H$ ,  $I$ ,  $J$ とする。このとき、

$$QJ : QH = \frac{1}{PF} : \frac{1}{PD} = \frac{1}{\gamma} : \frac{1}{\alpha} \quad (\because BP, BQ \text{は} \angle B \text{の等角共役線})$$

$$QH : QI = \frac{1}{PD} : \frac{1}{PE} = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} \quad (\because CP, CQ \text{は} \angle C \text{の等角共役線})$$

したがって

$$QI : QJ = \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma}$$

ゆえに、 $AP$ と $AQ$ は $\angle A$ の等角共役線であり、命題が成り立つ。

命題で求めた点 $Q$ を点 $P$ の等角共役点という。また、点 $P$ の3線座標が $P(\alpha, \beta, \gamma)$ のとき、

その等角共役点 $Q$ の3線座標は $Q\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$ である。

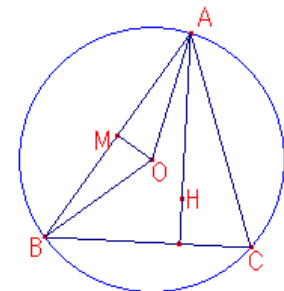
例  $\triangle ABC$ の外心 $O$ の等角共役点は右の図より垂心 $H$ である。

実際、右図で $\angle AOM = \angle C$ より $\angle OAB = \angle HAC$

したがって、 $AO$ と $AH$ は $\angle A$ の等角共役線である。

外心 $O$ の3線座標が $O(\cos A, \cos B, \cos C)$ であるから

$$H\left(\frac{1}{\cos A}, \frac{1}{\cos B}, \frac{1}{\cos C}\right) \text{である。}$$



定義 三角形の重心の等角共役点を類似重心という.

$\triangle ABC$ の重心Gの3線座標 $G\left(\frac{1}{BC}, \frac{1}{CA}, \frac{1}{AB}\right)$ であるから,  $\triangle ABC$ の類似重心Kの3線座標は $K(BC, CA, AB)$ である.

さて, 準備が長くなったが, 例題3に戻ろう.

例題3 点Pは $\triangle ABC$ の内部の点とする. 点Pと辺BC, CA, ABとの距離をそれぞれ $x, y, z$ とするととき和 $x^2 + y^2 + z^2$ を最小にする点Pを求めよ.

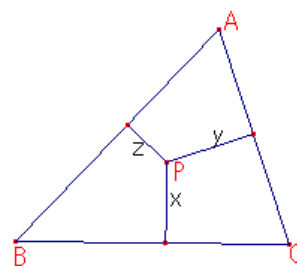
題意を満たす点Pは

$$x : y : z = a : b : c$$

を満たす. すなわち, 題意を満たす点Pの3線座標は

$$P(BC, CA, AB)$$

である. したがって, 題意を満たす点Pは $\triangle ABC$ の類似重心である.



$\triangle ABC$ を与えたとき, 3頂点A, B, Cの位置ベクトルをそれぞれ

$$A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$$

とすると,  $\triangle ABC$ を含む平面上の点P( $\vec{p}$ )は

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \quad (x + y + z = 1)$$

この $(x, y, z)$ を点Pの重心座標という.

$$\triangle PBC = S_1, \triangle PCA = S_2, \triangle PAB = S_3$$

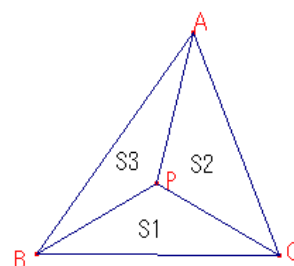
とすると

$$x : y : z = S_1 : S_2 : S_3$$

であるから, 点Pの重心座標を $(x, y, z)$ , 3線座標 $(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $BC = a, CA = b, AB = c$ とすると

$$x : y : z = S_1 : S_2 : S_3 = a\alpha : b\beta : c\gamma$$

が成り立つ.



### 3. 順序の原理

小さい順に並んだ数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  について次の定理が成り立ちます.

定理

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, \quad b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \text{ とする.}$$

ここで  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  を  $(1, 2, \dots, n)$  の一つの順列とする.

このとき

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \quad \dots \textcircled{1}$$



$$\leq a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \cdots + a_n b_{j_n} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ.

小さい順に順序付けられた数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  に対して,  
和①を逆順の和, ②を乱順の和, ③を同順の和といい, 上の定理を順序の原理といいます.

順序の原理がどのように利用されるか2つ例を挙げましょう.

例1  $a, b, c$  は正の数. このとき

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

が成り立つ.

証明  $a \leq b \leq c$  としても一般性を失わない.

このとき  $a+b \leq a+c \leq b+c$  より

$$\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}$$

したがって, 順序の原理より

$$\frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①+②より

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

を得る.

例2  $a_1, a_2, \dots, a_n$  は互いに異なる自然数である. このとき, 次の不等式が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{i}$$

証明  $j_1, j_2, \dots, j_n$  を

$$a_{j_1} < a_{j_2} < \cdots < a_{j_n}$$

を満たす,  $1, 2, \dots, n$  の順列とする.

$a_i^2$  の大小と  $\frac{1}{a_i}$  の大小は逆であるから, 順序の原理より

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_{j_i}}$$

さらに  $j_i \geq i$  であるから

$$\leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{i}$$

(不等式の図形への応用終わり)