

Steiner 最小木問題の初等幾何的取り扱い

小室久二雄

<要約>

平面上のいくつかの点を与えたとき、それらの点を結ぶ最短のネットワークを求める問題を最短ネットワーク問題または Steiner 最小木問題と呼ぶ。この問題は与える点が増えると指数関数的に計算時間が増大する NP (Non deterministic polynomial time) 困難問題として有名であり [1], 比較的小さい与えられた点に対して、いかに計算量を少なくして解決を目指すという研究は盛んであるが、純粹の初等幾何の問題としてはそれほど注目されていない。

4 点の場合の Steiner 最小木の性質を初等幾何学的に解決しさらにその結果を 5 点の場合に応用した。それらの内容を報告する。

1. はじめに

平面上にいくつかの点を与えたとき、最短のネットワークを求める問題を Steiner 最小木問題 (Steiner minimal tree problem) という。

2 では、平面上の 3 点の場合を扱う。3 点の場合はすでに完全に解決されているが、初等幾何の立場から見ると、この 3 点の場合が、考え方の基本となっている。2.1 では以下で用いる 3 点で成り立つ諸性質を証明している。

与えられた点を結ぶネットワークには新しい点を付け加えて上で構成される場合と、与えられた点を結ぶ線分だけにより構成される場合がある。前者の場合の最短のネットワークを Steiner 最小木 (Steiner minimal tree) といい後者の場合の最短ネットワークを最小木 (minimal spanning tree) と呼ぶ。与えられた点に対して Steiner 最小木の長さとも最小木の長さの割合は興味ある問題で、この比を Steiner 比という。すなわち

$$(\text{Steiner 比}) = \frac{(\text{最小 Steiner 木の長さ})}{(\text{最小木の長さ})}$$

である。2.2 では、3 点の Steiner 比の最小値が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ であることを証明している。この

事実はすでに [2] で証明されているが、ここでは純粹に初等幾何の問題として扱い、与えられた 3 点をどのように変化させれば Steiner 比を減少させながら正三角形になるかがわかる。

3 は 4 点の連絡網を扱い、本稿の中心である。3.1 では、4 点の場合、Steiner 最小木となる候補は 2 つありそのどちらが短いかを辺の長さだけで判断する方法が述べてある。3.2 では Steiner 木が存在する条件を扱い、3.3 では 4 点が凸でない場合を扱っている。3.4 では Steiner 最小木の Steiner 点間の距離の性質を調べている。

4 では 5 点の連絡網扱っている。5 点の場合の最小の Steiner 木となる候補は 5 つある。1.1 では 3 で述べた 4 点の場合を利用して、5 個の候補のうち 2 つ以下に絞る方法を紹介し、4.2 では中継点 (Steiner 点) の距離の性質を用いて、Steiner 最小木でないものを見つ

けだす方法を述べている。

2. 3点の Steiner 最小木問題

2.1 3点の Steiner 最小木問題

ここでは3点の Steiner 最小木問題を扱う。この問題は、

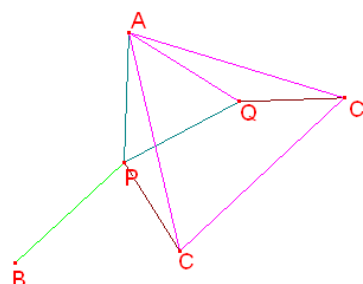
3つの都市A, B, Cがあるとき、どの都市にもいける道路網はどのように作れば一番短いか

と言い換えることもでき、身近でかつ重要な問題である。

次の2つの定理が3点の Steiner 最小木問題の解答であり、これからの議論の基礎となる。

定理1

$\triangle ABC$ の内角がどれも 120° より小のとき、 $\triangle ABC$ の Steiner 点をFとすれば $AF + BF + CF$ が3点A, B, Cの Steiner 最小木になる。なお、 $\triangle ABC$ の Steiner 点Fとは $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120^\circ$ を満たす点である。



証明

点Pを平面上の任意の点とする。 $\triangle APC$ を点Aの周りに 60° 回転した三角形を $\triangle AQC'$ とする。このとき、 $\triangle APQ$, $\triangle ACC'$ は正三角形である。したがって

$$BP + AP + CP \leq BP + PQ + QC' \leq BC'$$

等号が成り立つのは $\angle AQP = \angle APQ = 60^\circ$ であるから

$$\angle APB = \angle AQC' = 120^\circ$$

のとき。さらに

$$\angle AQC' = \angle APC$$

であるからPが

$$\angle APB = \angle APC = 120^\circ$$

のとき $AP + BP + CP$ が最小になる。したがって定理が成り立つ。

ここでいう Steiner 点は三角形の場合は Fermat 点と呼ぶことも多い。

Sが Steiner 点のとき、 $\triangle ABC$ の外側に正三角形 ACC' を作りその外接円をOとすれば、3点B, S, C' は一直線上にあり、さらに

$\angle ASC = 120^\circ$ であるから、Sは BC' と円O

の交点である。さらに、

$$SC = TC', AS = ST$$

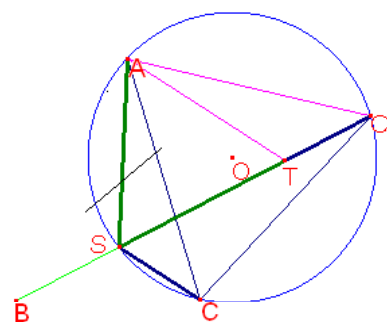
であるから

$$SA + SB + SC = BC' \text{ かつ } SA + SC = SC'$$

,

が成り立つ。この性質はこれからしばしば用いられる。

当然、辺AB, BCの外側に正三角形を作っても同じ性質が成り立つ。



定理 2

$\triangle ABC$ で $\angle A \geq 120^\circ$ のとき、3点 A, B, C の最短の連絡網は $AB + AC$ である。

証明

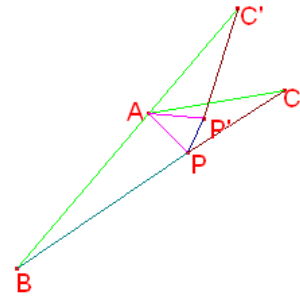
$180^\circ - \angle A = \theta$ とおく。

平面上の任意の点 P に対して、 $\triangle APC$ を A の周りに θ だけ回転させたものを $\triangle AP'C'$ とする。

このとき $PP' \leq AP$ であるから

$$\begin{aligned} BP + AP + CP &\geq BP + PP' + P'C' \\ &\geq BC' = AB + AC \end{aligned}$$

したがって、 P をどこにとっても $AB + AC$ より短くなることはない。



この2つの定理が示すように、3点の最短ネットワークは Steiner 点を用いて構成される場合と、与えられた点を結ぶ線分だけにより構成される場合がある。与えられた点を結ぶ線分だけ考えこたときの最短ネットワークを最小木 (minimal spanning tree) と呼び、与えられた点以外に中継点を付け加えて構成されるネットワークを Steiner 木といい、Steiner 木のうち最短のものを Steiner 最小木 (minimal Steiner tree) と呼ぶ。このときの中継点を Steiner 点という。3点の場合は Steiner 木は1つしかないが、4点以上の場合には与えられる点が増えれば、Steiner 木も指数関数的に増える。それゆえにこの問題は「NP 完全問題」の1つであり、最小のものを見つけることの困難さがここにある。

なお、最小木を見つけることはたやすい。実際、 n 個の点を与えられたとき、2点を結ぶ線分は nC_2 本あり、それを短い順に閉じないように $n - 1$ 本を選べばよい [3]。

2.2 Steiner 比

Steiner 最小木が存在するときそれが最小木より短いとは一般にはいえないが、与えられたいくつかの点に対して

$$(\text{Steiner 比}) = \frac{(\text{Steiner 最小木の長さ})}{(\text{最小木の長さ})}$$

によって Steiner 比を定義する。一般には Steiner 最小木の方が最小木より短いそうでない場合も存在し、Steiner 木が存在しない場合もある。そのときは Steiner 比 = 1 と定義する。すなわち、すべての連絡網のうちで一番短いものを最小 Steiner 木と定義する。

3点の Steiner 比については次の定理が成り立つ。

定理 3

3点の Steiner 比の最小値は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。なお最小値を与えるのは正三角形である。

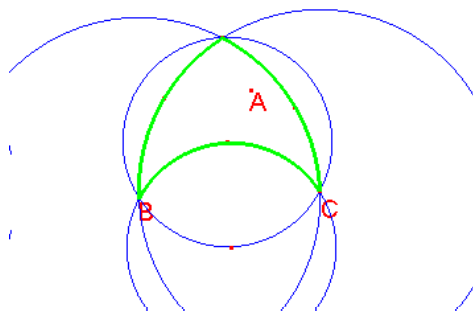
証明

$\triangle ABC$ で1つの内角が 120° 以上のとき、Steiner 比は1であるから

3点 A, B, C が $CA \leq AB \leq BC$, $\angle A < 120^\circ$ である $\triangle ABC$ で調べればよい。

B, Cを固定して考える. 頂点Aは右図の太線の内部または周上を考えればよい.

頂点Aに対して, $BP + CP = BA + CA$ を満たす点Pの軌跡すなわち, B, Cを焦点とするAを通る楕円を考える. Pがこの楕円の右図の太線の内部または周上を動くとき, 三点P, B, Cの最小木の長さは $PB + PC$ で一定であるので, 最小Steiner木の長さが最小になる場合がSteiner比の最小値である.



以下, Pが上記の楕円上を動くときの最小Steiner木の長さの最小値を求める.

BCをx軸, BCの垂直二等分線をy軸とし, $C(c, 0)$ とする.

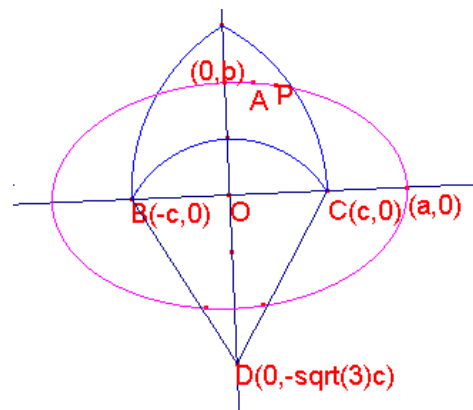
楕円上の点を $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ とおくことができる. ただし, $AB + AC = 2a$,

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$\triangle PBC$ のSteiner点をFとすると

$$PF + BF + CF = PD$$

ただし, $D(0, -\sqrt{3}c)$



$$PD^2 = (a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta + \sqrt{3}c)^2 = f(\theta)$$

$$f'(\theta) = 2\sqrt{3}cc \cos \theta \left(b - \frac{c}{\sqrt{3}} \sin \theta \right) \dots \textcircled{1}$$

である.

$b \geq \frac{c}{\sqrt{3}}$ のとき $BA = BC$ または $CA = CB$ のときに PD は最小値をとる.

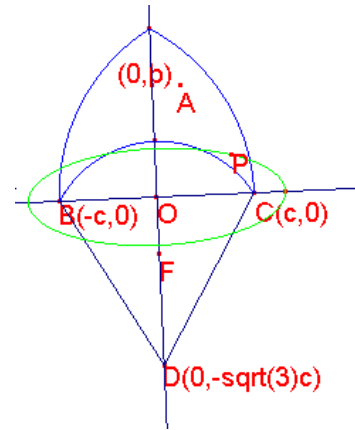
$0 < b < \frac{c}{\sqrt{3}}$ のとき, ①より

$$b = \frac{c \sin \theta}{\sqrt{3}} \quad \text{すなわち} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3} b}{c} \quad \text{のとき}$$

$$P(a \cos \theta, b \sin \theta) \text{ は } \left(\frac{a \sqrt{c^2 - 3b^2}}{c}, \frac{\sqrt{3} b^2}{c} \right)$$

である. $S(0, -\frac{c}{\sqrt{3}})$ とおく.

$$SP^2 = \frac{4c^2}{3}$$



であるから, PはFを中心とするCBを見込む角が 120° の円弧上. したがってこの場合も $BA=BC$ または $CA=CB$ のときにPDは最小値をとる.

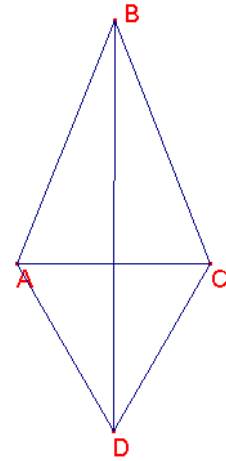
したがって, あとは $CA \leq BC = BA$ のとき調べればよい.

$$AB=BC=1, \angle ABC=2\theta \text{ とおき, } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{6} \text{ で考}$$

える.

$$f(\theta) = \frac{BD}{AB+AC} = \frac{\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta}{1+2\sin \theta}$$

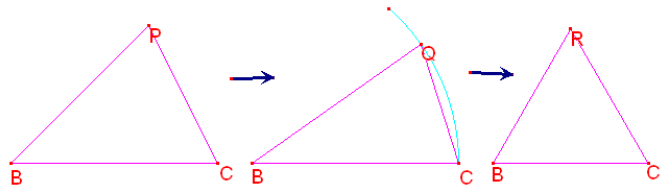
$$f'(\theta) = \frac{-2 - 2\sin(\theta - \frac{\pi}{3})}{(1+2\sin \theta)^2} \leq 0$$



したがって, 命題が証明された.

Steiner 比が小さいことを, Steiner 最小木の効率よいということにすれば, 周の長さが一定の3点において, 辺BCが一番長い $\triangle PBC$ に対して,

点Qを $BQ+CQ=BP+CP$ かつ $BC=BQ$ を満たすようにとり, さらに正三角形に変化させていけば, Steiner 比が単調に減少する.

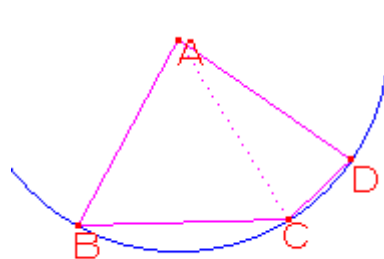


4点の場合は正三角形ABCでCの近くに第4の点Dをとれば限りなく $\frac{\sqrt{3}}{2}$ に近くな

る。(Aを中心とする半径ACの円周上に点Dおき、点DをCに近づければよい)

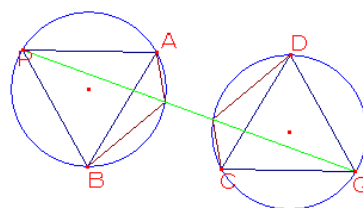
さらにDの近くに何個でも点を置けるから、

n点の Steiner 比の最小値は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ より大にはならない.



例 正三角形2つよりできるひし形は Steiner 比が

$\frac{\sqrt{7}}{3}$ となり、この値は比較的小さい値である.



3. 4点の Steiner 最小木

3.1 4点の Steiner 最小木

4点A, B, C, Dを結ぶ最短の連絡網を調べよう. 三角形と同じように、4点以外の点Pを用いて

$$PA + PB + PC + PD$$

が最小になる場合を考えると、それはPがACとBDの交点Oのときである. 実際

$$(PA + PC) + (PB + PD) \geq (OA + OC) + (OB + OD)$$

である.

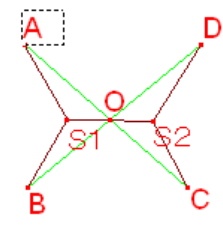
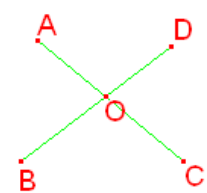
しかしこれは最短ではない. $\triangle ABO$, $\triangle CDO$ の Steiner 点をそれぞれ S_1 , S_2 とすると

$$OA + OB + OC + OD > AS_1 + BS_1 + S_1S_2 + S_2C + S_2D$$

である.

もし、 $AS_1 + BS_1 + S_1S_2 + S_2C + S_2D$ が最短なら、 S_1 は $\triangle ABS_2$ の Steiner 点であり、 S_2 は $\triangle CDS_1$ の Steiner 点である. したがって、 S_1 , S_2 それぞれで3本の線分が互いに 120° で交わらなければならない. この S_1 , S_2 のように、与えられた点A, B, C, Dに対して、3本の線分がそれぞれ 120° をなすように付け加えた点を Steiner 点という. このような、Steiner 点が2個ある連絡網が Steiner 最小木の候補である.

この連絡網が最短であることを示すには、すくなくとも4点の連絡網では Steiner 点が2個以下であることを示す必要がある. それは次の定理による.



定理 4 [2]

n 個の点の Steiner 最小木で, Steiner 点は最大 $n - 2$ 個である.

証明

Steiner 点の個数を k 個とする. このとき Steiner 木を構成する線分は $n + k - 1$ 本である.

一方, 各線分は 2 頂点を結び, かつ steiner 点からでる線分は 3 本で, n 個の点からは少なくとも 1 本の線分が出ている. したがって

$$2(n + k - 1) \geq 3k + n$$

$$\therefore k \leq n - 2$$

等号が成り立つのは, n 個の頂点からそれぞれただ 1 本の線分が出ているときである.

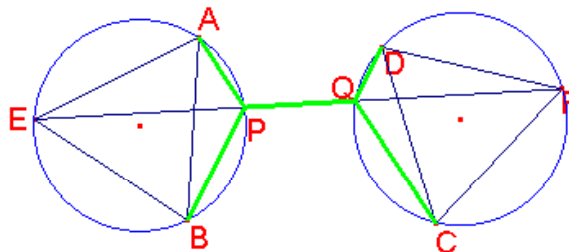
この定理より, 4 点の Steiner 最小木を調べるには Steiner 点が 2 個以下のときだけ考えればよい.

4 点 A, B, C, D が与えられたとき, Steiner 点を 2 個持つ Steiner 木は 2 つ存在する.

まず, 作り方を述べる.

2 個の Steiner 点を P, Q とする.

右図は四角形 $ABCD$ の辺 AB, CD の外側に正三角形 ABE, DCF を描いたものである.



点 P は $\triangle ABQ$ の Steiner 点であるから 3 点 E, P, Q は同一直線上にあり, 同様に 3 点 P, Q, F も同一直線上にある. したがって, 4 点 E, P, Q, F は直線上あり, P は $\triangle AEB$ の外接円上でもあるから, EF と $\triangle AEB, \triangle DCF$ の外接円との交点が Steiner 点である.

上の図で, $AP + BP + PQ + CQ + DQ = EF$ であるから

$$AP + BP + PQ + CQ + DQ \leq AB + AD + DC$$

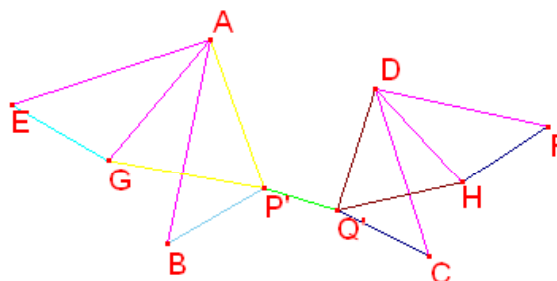
$$AP + BP + PQ + CQ + DQ \leq AB + BC + CD$$

がわかる.

さらに, P', Q' を任意にとったとき,

$\triangle AP'B$ を A の周りに -60° 回転した三角形を $\triangle AGE, \triangle DQ'C$ を D の周りに 60° 回転した三角形を $\triangle DHF$ とする. このとき

$AP' = P'G, P'B = EG,$
 $DQ' = Q'H, Q'C = HF$
 であるから



$$AP' + P'B + P'Q' + Q'C + Q'D$$

$$= EG + GP' + P'Q' + Q'H + HF \leq EF$$

等号が成り立つのは

$$\angle AGE = \angle AP'Q' = \angle DQ'P' = \angle DHF = 120^\circ$$

で P', Q' が Steiner 点のときである。

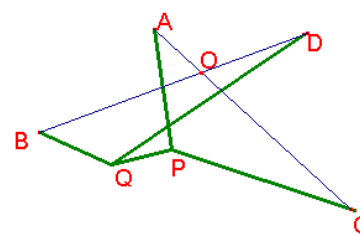
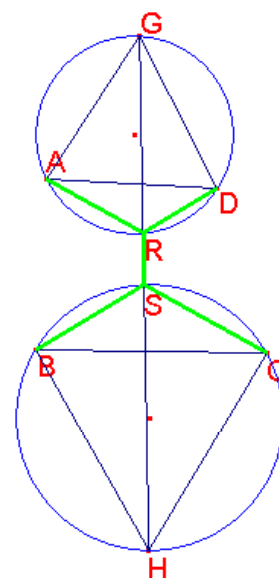
4 点の Steiner 木はもう 1 つある。それは線分 AD, BC を 1 辺とする正三角形 $\triangle ADG, \triangle CBH$ をつくり作成したものである (右図)。2 つの Steiner 木の EF と GH どちらが短いかが問題であるがこれは後で述べる。

四角形 $ABCD$ が凸のとき、 $(A, B), (C, D)$ または $(A, D), (B, C)$ を組にして Steiner 木を考えている。もし $(A, C), (B, D)$ を組にしたときどうなるかも検討する必要がある。

このとき、 P, Q をとり、 PA, PC 、及び QB, QD を結び

$$PA + PC + PQ + QB + QC$$

の最小値を求めることになるが、これは AC, BD の交点を O とするとき、 P, Q が O と一致するときが一番短く、その長さは最短ではないので、この場合は考える必要はない。



3.2 4 点の Steiner 最小木の見つけ方

4 点を与えたとき、Steiner 点を 2 つもつ Steiner 木は最大 2 つ存在する。どちらが Steiner 最小木になるかは重要な問題である。ここではこの問題を扱う。なお、この証明が本稿の一番の目的である。

問題は、凸四角形の外側に正三角形 $\triangle BAE, \triangle CBH, \triangle DCF, \triangle ADG$ を作ったとき EF, GH いずれが短いかを調べることである。まず、四角形 $ABCD$ は $\angle B, \angle C, AB = a, BC = b, CD = c$

で決まるから、 EF, GH を a, b, c, B, C で表して調べる。 EF の長さを計算すると、

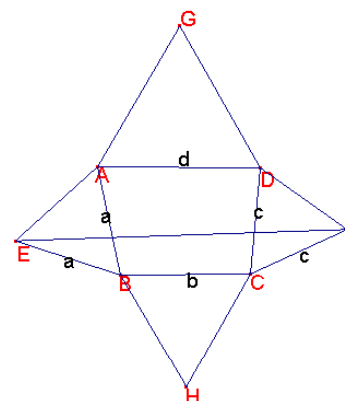
$$EF^2 = (b + a \cos(120^\circ - B) + c \cos(120^\circ - C))^2$$

$$+ (a \sin(120^\circ - B) - c \sin(120^\circ - C))^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos(120^\circ - B) + 2bc \cos(120^\circ - C) + 2ac \cos(240^\circ - B - C)$$

となる。

ここで、次の命題を用いる。



命題

凸四角形 $ABCD$ の外側に, AB , CD を底辺とする正三角形 $\triangle EBA$, $\triangle DCF$ 及び, BC , DA を底辺とする頂角が 120° の 2 等辺三角形 $\triangle KCB$, $\triangle LAD$ を作る. このとき

$$EF \perp KL, EF = \sqrt{3} KL$$

がなりたつ.

証明

A の周りに θ 回転する回転移動を $R(A, \theta)$ とおく.

このとき, 合成写像

$$R(L, -120^\circ) \circ R(F, -60^\circ) \circ R(K, -120^\circ) \circ R(E, -60^\circ)$$

-360° 回転であるから平行移動であり, さらに $A \rightarrow A$ であるから恒等変換である.

$$R(K, -120^\circ) \circ R(E, -60^\circ)$$

の回転の中心を O とすると, この合成写像は

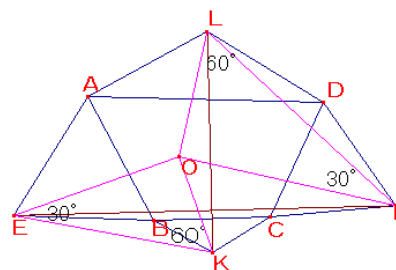
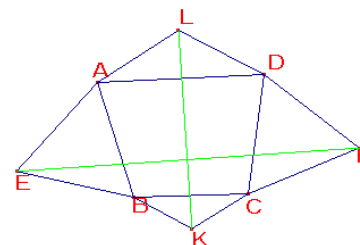
$$R(O, -180^\circ)$$

$$R(L, -120^\circ) \circ R(F, -60^\circ)$$

の回転の中心は O である. (\because 4 つの回転移動の合成が恒等写像である)

したがって, $\triangle OEK$ と $\triangle OFK$ はともに 30° , 60° , 90° の三角形. したがって,

$\triangle OLK$ を 90° 回転し $\sqrt{3}$ 倍したのが $\triangle OFE$. したがって, 命題が成り立つ.



上の命題より, 右図の EF と GH の大小は

EF と $\sqrt{3} PQ$ の大小を調べればよいことが分

かる. ただし, $\triangle PBA$, $\triangle QDC$ は頂角が 120°

の 2 等辺三角形. 四角形 $ABCD$ は $AB = a$,

$BC = b$, $CD = c$, $\angle B$, $\angle C$ で決まるから

a , b , c , B , C で表す.

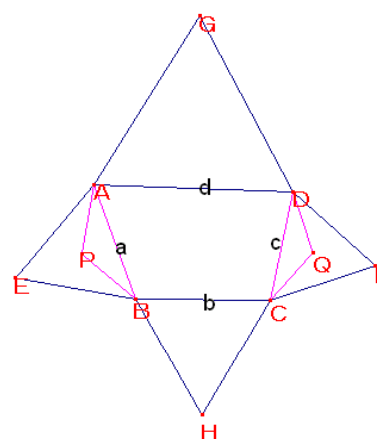
$$EF^2 - GH^2$$

$$= EF^2 - 3PQ^2$$

$$= -2b^2 + 2ab \cos B + 2bc \cos C$$

$$+ 2ca \cos(B+C)$$

となる.



次に, EF と GH の大小を調べるのに次の命題が役に立つ.

命題

凸四角形 ABCD のそれぞれの辺の外に書いた正三角形 $\triangle EBA$, $\triangle HCB$, $\triangle FDC$, $\triangle GAD$ に関して次が成り立つ.

$$EF = GH \Leftrightarrow AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$$

証明

複素数を用いる.

A (a), B (b), C (c), D (d), E (e), F (f), G (g), H (h) とする.

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \text{とおけば}$$

$$e - b = \omega (a - b), \quad h - c = \omega (b - c), \quad f - d = \omega (c - d), \quad g - a = \omega (d - a)$$

このとき

$$|f - e|^2 - |g - h|^2 = \{(d - b)(\bar{a} - \bar{c}) + (\bar{d} - \bar{a})(a - c)\}(\omega^2 + \bar{\omega}^2)$$

が成り立つので, 命題が証明された.

さらに次の命題が成り立つ

命題

凸四角形 ABCD において

$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2 \Leftrightarrow AC \perp BD$$

が成り立つ.

証明

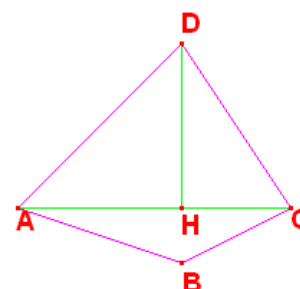
$AC \perp BD \Leftrightarrow$ B, D から AC に下した垂線の足が一致する

$$\Leftrightarrow DA^2 - AH^2 = DC^2 - CH^2 \quad \text{かつ}$$

$$BA^2 - AH^2 = BC^2 - CH^2$$

$$\Leftrightarrow DA^2 - DC^2 = AH^2 - CH^2 = BA^2 - BC^2$$

$$\Leftrightarrow AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$$

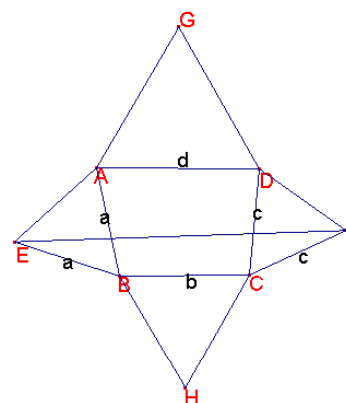


この命題は, 四角形の 4 辺を与えて, もし対角線が直交するなら, 形を変えてもすなわち 2 点 A, C 間の距離を長くしても短くしても必ず対角線は直交することを意味している. 逆に考えれば, 4 辺の長さを与えて対角線が直交しなければ, 形を変えても対角線は直交しないことが分かる.

したがって, 4 辺の長さを与えれば, EF と GH の大小は四角形の形が変わってもかわらないことが分かる.

すなわち, a, b, c, d を与えたときの EF, GH の大小は, 計算しやすい場合たとえば $a + b < c + d$ のとき $\angle B = 180^\circ$ の場合に調べる.

$$EF^2 - GH^2$$



$$= -2b^2 + 2ab \cos B + 2bc \cos C$$

$$+ 2ca \cos(B+C)$$

$$= a^2 + c^2 - (b^2 + d^2)$$

したがって、

$$a^2 + c^2 > b^2 + d^2$$

$$\Leftrightarrow EF > GH$$

したがって、次の定理を得る。

定理 5

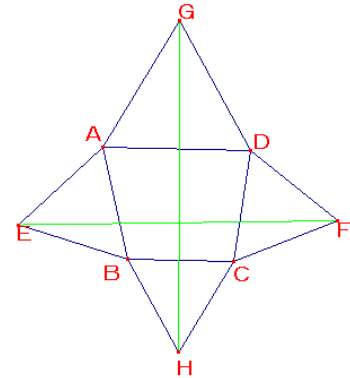
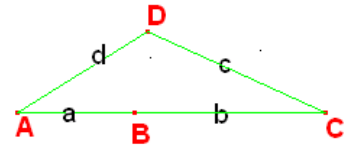
凸四角形 ABCD のそれぞれの辺の外に書いた正三角形 $\triangle EBA$, $\triangle HCB$, $\triangle FDC$, $\triangle GAD$ に関して次が成り立つ。

$$AB^2 + CD^2 > AD^2 + BC^2$$

のとき、4点 A, B, C, D の Steiner 最小木の長さは GH である

$$AB^2 + CD^2 < AD^2 + BC^2$$

のとき、4点 A, B, C, D の Steiner 最小木の長さは EF である。



注意

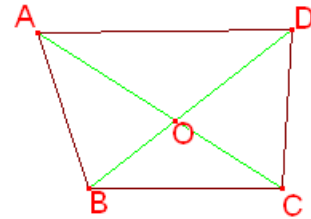
四角形 ABCD の対角線 AC, BD の交点を O とする。このとき、

$$AB^2 + CD^2 < AD^2 + BC^2$$

$$\Leftrightarrow \angle AOB < \angle AOD$$

$$\Leftrightarrow \angle AOB < 90^\circ$$

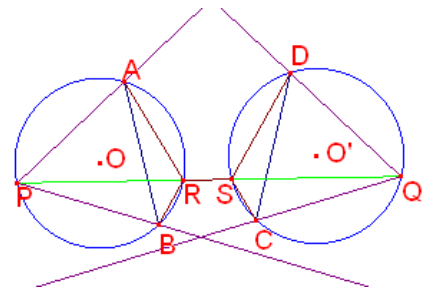
であるから、対角線のなす角で判断してもよい。



3.3 2個の Steiner 点を持つ Steiner 木が作れるための条件

今までは、4点の Steiner 木が2つ作れる場合のどちらが短いかを調べてきたが、ここでは、4点の Steiner 木ができるための条件を求める。

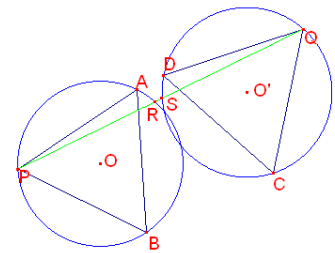
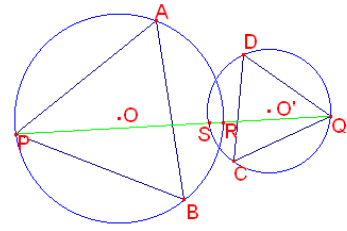
四角形 ABCD の外側に正三角形 $\triangle ABP$, $\triangle DCQ$ をつくり、 $\triangle ABP$, $\triangle DCQ$ の外接円をそれぞれ O, O' とする。Steiner 木は線分 PQ と円 O, O' の \widehat{AB} , \widehat{CD} の部分との交点を R, S とすると、線分 $AR + BR + RS + SC + SD$ で与えられる。したがって、1つ目の



条件は線分PQが $\widehat{AB}, \widehat{CD}$ と交わる. すなわち $\angle APB$ の中に点Qが含まれ, $\angle DQC$ の中に含まれることである.

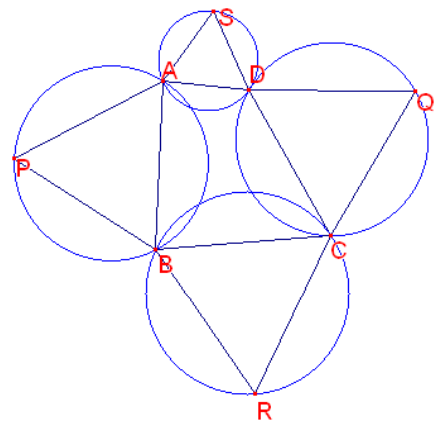
さらに, 2点R, Sが入れ替わると作れなくなるので, 2円O, O'が互いに他の外部にあるときは問題ないが, 2円O, O'が交わる時は注意深くR, Sの関係を調べる必要がある.

右上図は, 連絡網が存在しないが, 右下図は連絡網が存在する.



したがって, Steiner 点を2個持つ Steiner 木が2つ存在するかどうかを調べるには, 各辺の外側に正三角形 $\triangle BAP, \triangle CBR, \triangle DCQ, \triangle ADS$ とその外接円をかき, 線分SRが $\angle ASD, \angle BRC$ の内部にあり, かつ線分PQが $\angle APB, \angle CQD$ の内部にある.

さらに, 向かい側の円同士が互いに他の外部にあるか, もし交わる時は円弧との線分PQ, SRとの交点を調べればよい.



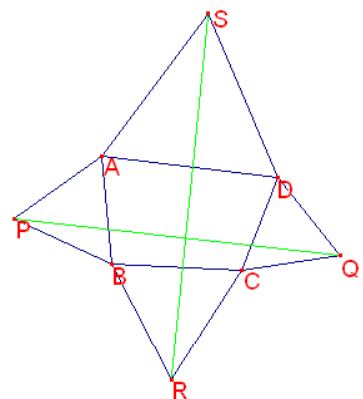
3.4 最小 Steiner 木が最短であることの証明

与えられた4点が2個の Steiner 点をもつ Steiner 木が2つ存在するとき, いずれかの連絡網 (実際は $AB^2 + CD^2$ と $BC^2 + DA^2$ の大小を調べ $AB^2 + CD^2 < BC^2 + DA^2$ のときはPQ) が Steiner 最小木であることを示す.

頂点を結ぶ3本の線分が3本とも辺のとき.

右図で

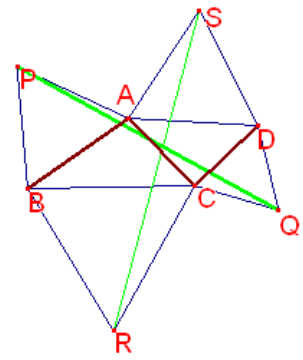
- $AD + AB + BC > SR$
- $AD + DC + CB > SR$
- $AB + BC + CD > PQ$
- $AB + AD + DC > PQ$



であるから成り立つ.

次に, 頂点を結ぶ 3 本の線分が対角線を含むとき

右図のように 3 本の線分が $AB + AC + CD$ のとき
 $AB + AC + CD = PA + AC + CQ > PQ$



右下図のように 3 本の線分が $AC + BC + CD$ のとき.
 $\triangle ACD$ に注目すれば CS は 3 点 A, C, B の Steiner
 最小木の長さより

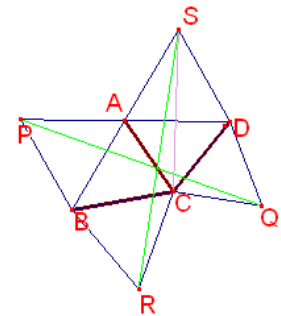
$$CS < AC + CD$$

$$\therefore BC + AC + CD > BC + CS$$

さらに $\triangle BCS$ に注目すれば

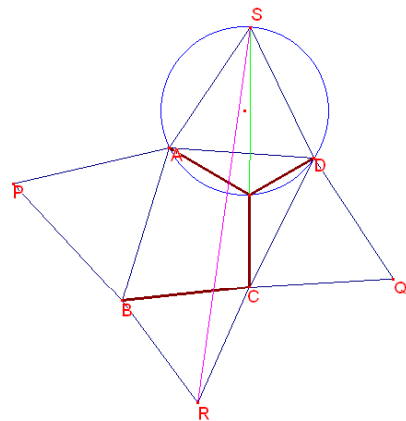
$$BC + CB > SR$$

以上で Steiner 最小木は最小木より短いことが証明された.



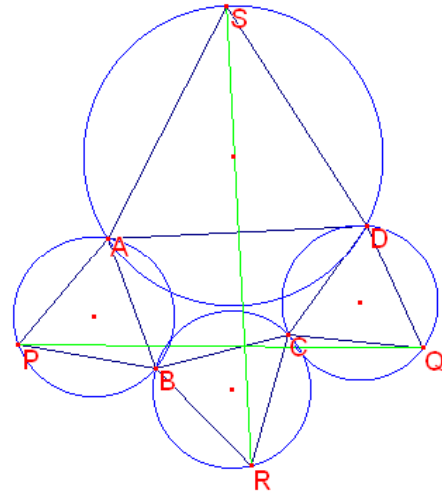
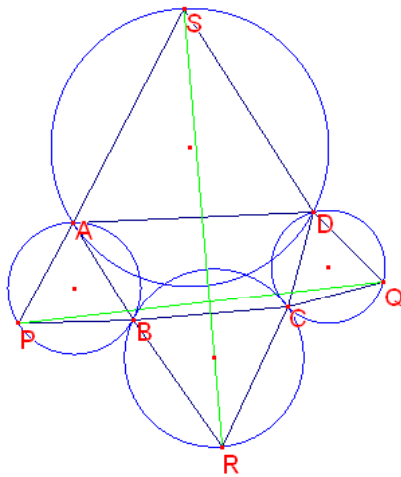
4 点 A, B, C, D の Steiner 木は, 3 点の Steiner
 木と線分, すなわち右図の 3 点 A, C, D の Steiner
 最小木に線分 BC を加えたものもある. これは,
 $CB + CS$ と長さは一致するから SR より長い.
 なお, この Steiner 木の長さは Steiner 点の片方を
 C にしたものと考えてもよい.

以上で, 4 点において Steiner 点を 2 つ持つも
 Steiner 木が 2 つ存在するとき, そのいずれかが
 Steiner 最小木であることが証明された.



注意 2 つの Steiner 木 PQ, RS のうち片方しか存在しないときでも, 短い PQ の方
 が存在すれば, 上で述べたいずれの連絡網も PQ または RS より短いので PQ が最短であ
 る (下左図).

しかし, PQ, RS で短いほうが存在しないときはそうは行かない. 3 つの線分の長さ,
 及び内角が 120° より小さい三角形の Steiner 木と残りの短い辺の和との大小を調べる
 必要ある (下右図).



3.5 四角形ABCDが凸でないとき

点Dが△ABCの内部にあるときを考える.

∠ADB, ∠BDC, ∠CDAの内, 120°より小さい角が1つのとき.

たとえば, ∠CDAだけが120°より小さいとき,

△ADCのSteiner点をFとすれば

$$BD + AF + CF + DF$$

が最短である.

∠ADCと∠BDCが120°より小のとき. BC, CAの外側に正三角形ECB, CFAをつくる.

このとき, AD+DE, BD+DFのいずれが短いかを調べる必要がある.

AEとBFの長さが等しいから, A, Eを焦点とするDを通る楕円とB, Fを頂点とするDを通る楕円の離心率の大きさを調べることにする.

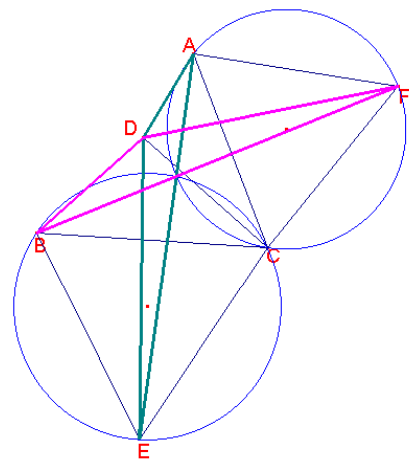
$$\frac{AE}{2} = c, \angle EAD = \theta, AD = r \text{ とおくと}$$

離心率eは2次方程式

$$(r \cos \theta) e^2 - (c + r) e + c = 0$$

の解である. 離心率の大きいほうがSteiner最小木を与える.

(AD+DE, BD+DFの大小は∠ADCと∠BDCの大小と一致しそうだが∠ADC=∠BDCのとき調べれば, 一致しないことが分かるようにそれほど単純ではない)



3.6 4点の Steiner 最小木の Steiner 点間の距離

4点の2個の Steiner 点を持つ Steiner 最小木の Steiner 点 S_1, S_2 間の距離を調べる.

$AS_1 + BS_1 + S_1S_2 + CS_2 + DS_2$ が4点 A, B, C, D の Steiner 最小木とする. このとき, AC と BD の交点を O とすると

$$\angle AOB < \angle AOD$$

が成り立つ.

一方, AS_1, BS_1, CS_2, DS_2 の中で一番短いもの (またはその一つ) を AS_1 とする. BS_1, CS_2, DS_2 上にそれぞれ点 B', C', D' を

$$B'S_1 = C'S_2 = D'S_2 = AS_1$$

を満たすようにとる. このとき, 四角形 $AB'C'D'$ は長方形で $AC', B'D'$ の交点を O' とすると,

$$\angle AO'B' < \angle AOB$$

であるから

$$\angle AO'B' < \angle AO'D'$$

したがって, $AD' > AB'$ がなりたつ.

ここで, $AS_1 = a, S_1S_2 = b$ とおくと

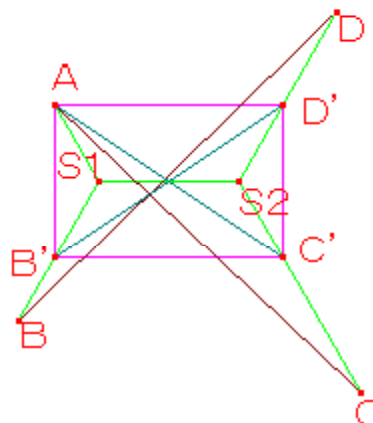
$$AD' = a + b, AB' = \sqrt{3} a$$

したがって,

$$b > (\sqrt{3} - 1) a$$

が成り立つ.

この性質より, Steiner 最小木は Steiner 点間の距離が有る程度以上長いことがわかり, 一目でこれは Steiner 最小木でないことが判断できる場合がある. この性質はあとで, 5点の連絡網で利用する.



4. 5点の場合

4.1 4点の性質を利用した方法

5点 A, B, C, D, E の Steiner 連結点を3個持つ Steiner 木は5個存在する. 4点の連絡網の応用として, どれが一番短いかを論ずる.

まず、5点A, B, C, D, Eの Steiner 点を3個持つ Steiner 木の性質を調べる。

S, T, Uが Steiner 点とすると、 $\triangle SBC$ で考えれば点Tは3点S, B, Cの Steiner 点である。したがって、線分BCの外側に正三角形PCBを作りその外接円をOとすれば、点TはSTと円Oの交点であり、さらに

$$ST = TB + TC$$

が成り立つ。

この性質を利用する。さらに線分DEの外側に正三角形QEDを作れば、3点A, P, Qの Steiner 点が点Sである。

以上の解析より、3個の Steiner 点を持つ Steiner 木は次のように作ることができる。

1. 線分BC, DEの外側に正三角形PCB, QDEをつくり、正三角形の外接円を円O, O'とする。
2. 3点A, P, Qの Steiner 点をSとする。
3. SPと円Oの交点をT, SQと円O'との交点をUとする。
4. 線分AS + ST + TB + TC + SU + UD + UEが求める Steiner 木である。

さらにこの Steiner 木の長さは3点A, P, Qの Steiner 木の長さAS + PS + QSの長さに等しく、それは右図のAXの長さに等しいことがわかる。なお $\triangle XQP$ は正三角形である。

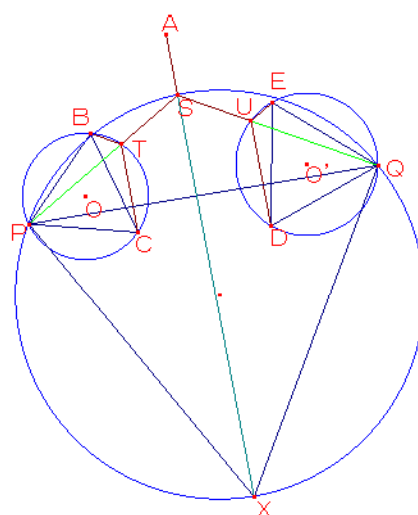
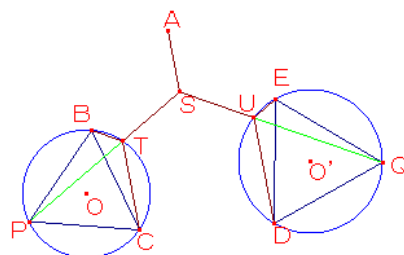
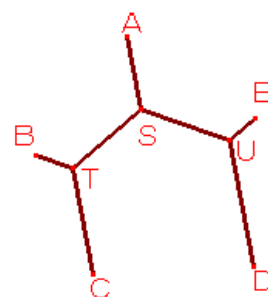
作り方より、5点A, B, C, D, Eについて

での3個の Steiner 点を持つ Steiner 木は最大5個存在する。実際上の例は、線分BC, DEを1辺とする正三角形を外側につくり作成した。これをA, (B, C), (D, E)

と表せば、各頂点に1つ対応するので、5個の Steiner 木が存在することが分かる。

その中で、1番短いものを調べる必要があるが、四角形で行った性質を用いると5個のうち3個を排除することができる。その方法は次の通りである。

5角形ABCDEの外側に、5角形の辺を1辺とする正三角形をつくる。



右図は、辺ABを1辺とする正三角形PABをついた図である。このとき、5点A, B, C, D, EのSteiner木は4点P, C, D, EのSteiner木に還元される。4点P, C, D, EのSteiner木は2つありそれはそれぞれ△PQEと△PRCのSteiner木の長さ

$$PE^2 + CD^2, PC^2 + DE^2$$

の大小を調べればどちらが短いかは分かる。

実際、 $PE^2 + CD^2 < PC^2 + DE^2$

のときは△PQEのSteiner木の方が短い。

そこで、五角形ABCDEの外側に正三角形を作った右図を考える。

四角形PCDEを用いれば

$$PE^2 + CD^2, PC^2 + DE^2$$

の大小により△PQEと△PRCのSteiner木の大小が分かるから、

$$PE^2 + CD^2, PC^2 + DE^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$QA^2 + DE^2, QD^2 + EA^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$RE^2 + AB^2, RB^2 + AE^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$SC^2 + AB^2, SA^2 + BC^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

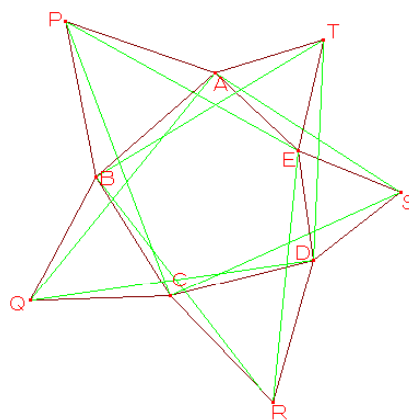
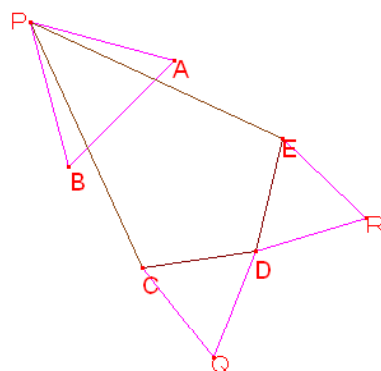
$$TD^2 + BC^2, TB^2 + CD^2 \quad \dots \textcircled{5}$$

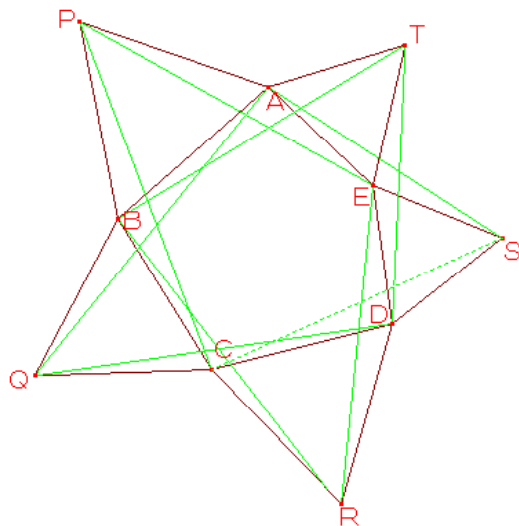
の長さを求めれば三角形のSteiner木の長さの大小が分かる。さらに、

$$AQ = PC, BR = QD, CS = RE, DT = SA, EP = TB$$

である（ $\because 60^\circ$ 回転すればよい）から、上の10種類の値は5種類になる。その中で一番短いものを選ぶ。たとえば $PE^2 + CD^2$ が最小なら①より△PERのSteiner木のほうが△PCSのSteiner木より短い。

さらに、 $PE^2 + CD^2 = TB^2 + CD^2$ であるから $TB^2 + CD^2$ も最小である。したがって、⑤より△TBRのSteiner木のほうが△TDQのSteiner木より短い。したがって、以上より△PCE, △TDQのSteiner木は最短でないことが分かる。さらに△PERと△TBRの関係は③より、どちらが短いかが分かる。ここでは△PCEのSteiner木の方が短いとすれば、5個のSteiner木のうち最短になるのは△PCEのSteiner木と△AQSのSteiner木のいずれが短いかを調べることに還元される。





- AB=** 3.8049756024 cm
- BC=** 3.3808364944 cm
- CD=** 3.5550673911 cm
- DE=** 2.6572432761 cm
- EA=** 2.7369686206 cm
- AQ=PC=** 7.0672248793 cm
- BR=QD=** 6.5037557785 cm
- CS=RE=** 6.0812864634 cm
- DT=SA=** 5.3037205121 cm
- EP=AQ=** 6.4013799169 cm
- AQ² CP²**
+DE²= +DE²= Result: 57.0066093225 cm²
- BR² DQ²**
+EA²= +EA²= Result: 49.7898364564 cm²
- CS² ER²**
+AB²= +AB²= Result: 51.4598843852 cm²
- DT² AS²**
+BC²=+BC²= Result: 39.5595066723 cm²
- EP² AQ²**
+CD²= +CD²= Result: 53.6161689961 cm²

たとえば、上の図で調べてみれば、

$$DT^2 + BC^2 = AS^2 + BC^2$$

が一番短い。四角形DTBCに注目すれば△DTQの Steiner 木方が△BRTの Steiner 木より短い。また四角形ABC Sに注目することにより △AQSの Steiner 木方が△CSPの Steiner 木より短い。さらに四角形QDEAに注目すれば

$DQ^2 + EA^2$ と $AQ^2 + CD^2$ の大小より△DTQの Steiner 木の方が短い。

したがって、△DTQの Steiner 木と残りの△EPRの Steiner 木の大小を調べれば、5個の Steiner 木のうち一番短いものを見つけることができる。

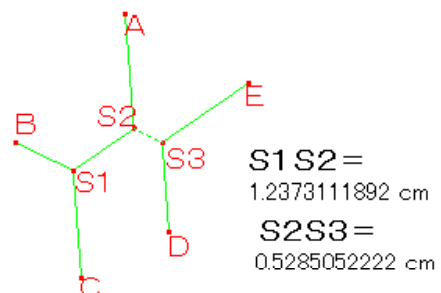
4.2 Steiner 点間の距離を用いる方法

3.4 で述べた4点の Steiner 最小木の Steiner 点間の距離の性質を用いると、Steiner 最小木にならないことを簡単に判断できる場合がある。

右の図は5点A, B, C, D, Eの Steiner 木である。もしこの Steiner 木が最小とする、4点A, S₁, D, Eに制限しても Steiner 最小木である。

$$S_2 S_3 > (\sqrt{3} - 1) S_1 S_2$$

を満たさないから、この Steiner 木は最小ではない。



- S1 S2=**
1.2373111892 cm
- S2 S3=**
0.5285052222 cm

5.終わりに

Steiner 最小木問題を純粋な初等幾何の問題として扱うことはあまり行われていないので、ここで述べた内容が少しは意味があると思ひ、どこかへの投稿を想定して論文の形でまとめました。しかし、本稿の中核である4点の場合の結果はすでに知られている内容のようです。

すでに述べたように論文として発表しようとして書いたもので、一部証明が不親切のところがあります。その点付け加えます。

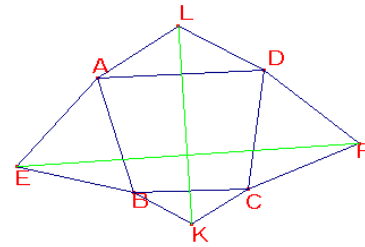
3.2 で扱った

命題

凸四角形 $ABCD$ の外側に、 AB 、 CD を底辺とする正三角形 $\triangle EBA$ 、 $\triangle DCF$ 及び、 BC 、 DA を底辺とする頂角が 120° の2等辺三角形 $\triangle KCB$ 、 $\triangle LAD$ を作る。このとき

$$EF \perp KL, EF = \sqrt{3} KL$$

がなりたつ。



の証明について少し解説します。

回転移動の合成を利用しています。

A の周りに θ 回転する回転移動を $R(A, \theta)$ とおく。このとき、 $R(A, \theta_1)$ と $R(A, \theta_2)$ の合成写像は

$$R(B, \theta_2) \circ R(A, \theta_1) = R(C, \theta_1 + \theta_2)$$

となります。ただし、 C は解説の中で分かります。

証明は、回転移動を2つの対称移動の合成と見ます。

その対称移動の対称軸の一つを AB とし、

半直線 AB を A の周りに $-\theta_1/2$ 回転した半直線と BA を B の周りに $\theta_2/2$ 回転した半直線の交点を C とする。 A の周りに θ_1 回転移動することは AC に関する対称移動と AB に関する対称の合成であり、 B の周りに θ_2 回転移動することは BA に関する対称移動と BC に関する対称の合成である。したがって、

$R(B, \theta_2) \circ R(A, \theta_1)$ は CA に関する対称移動と CB に関する対称移動の合成である。 CA から CB にはかった角は向きを考え

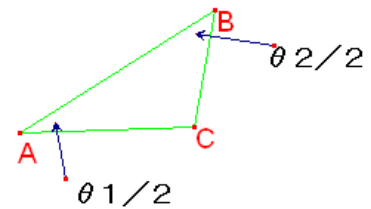
$$(\theta_1 + \theta_2) / 2 - \pi$$

である。したがって、合成関数 $R(B, \theta_2) \circ R(A, \theta_1)$ は C の周りに

$\theta_1 + \theta_2 - 2\pi$ すなわち $\theta_1 + \theta_2$ だけ回転する回転移動である

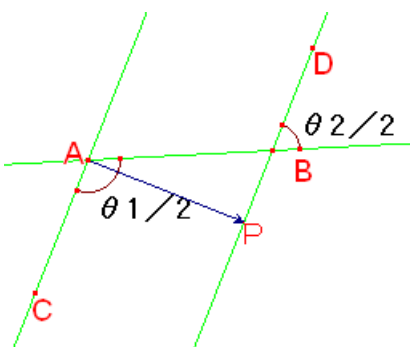
この解説から分かるように、回転の中心 C は半直線 AB を A の周りに $-\theta_1/2$ 回転した半直線と BA を B の周りに $\theta_2/2$ 回転した半直線の交点である。

次に2つの回転移動の合成 $R(B, \theta_2) \circ R(A, \theta_1)$ は $0 < \theta_1, \theta_2 < 360^\circ, \theta_1 + \theta_2 = 360^\circ$ が成り立つとき、平行移動になります。



右の図で、半直線ABをAの周りに $-\theta_1/2$ 回転したものをAC、BAをBの周りに $\theta_2/2$ 回転したものをBDとすれば、

$R(B, \theta_2) \circ R(A, \theta_1)$ はACに関する対称変換とBDに関する対称変換の合成になるから、AからBDに下した垂線の足をPとすれば移動が $2\overrightarrow{AP}$ で決まる平行移動である。

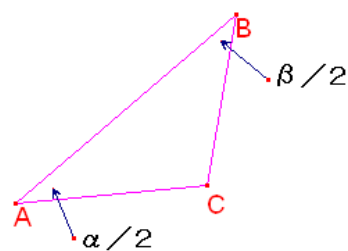


次に3つの回転移動の合成が恒等変換になるとき、次の性質が成り立ちます・

3つの回転移動 $R(A, \alpha)$, $R(B, \beta)$, $R(C, \gamma)$ は $0 < \alpha, \beta, \gamma < 360^\circ$, $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ が成り立つとする。もしこの合成変換 $R(C, \gamma) \circ R(B, \beta) \circ R(A, \alpha)$ が恒等変換のとき $\triangle ABC$ は $\angle A = \alpha/2$, $\angle B = \beta/2$, $\angle C = \gamma/2$ を満たす。

証明は次のように行う。

$R(B, \beta) \circ R(A, \alpha)$ の回転の中心をXすると、XはCと一致する。なぜなら、もし一致しないと $R(C, \gamma) \circ R(B, \beta) \circ R(A, \alpha)$ は恒等変換にならない。したがって、右の図のようになり成り立つことが分かる。



以上のことを踏まえれば、3.2 の命題が無理なく理解できると思います。

参考文献

- [1] Richard Courant and Herbert Robbins, What Is Mathematics, Oxford University Press, New York, 1941
- [2] E.N.Gilbert and H.O.Pollark, "Steiner Minimal Trees", SIAM journal on Applied Mathematics, vol.16, no1, pp.1-29, 1968
- [3] 岡部篤行, 鈴木敦夫, 最適配置の数理, 朝倉書店