

malfatti の問題の解

次の連立方程式を解けばよい.

$$m y^2 + n z^2 + 2 r y z = a r \quad \dots \textcircled{1}$$

$$n z^2 + l x^2 + 2 r z x = b r \quad \dots \textcircled{2}$$

$$l x^2 + m y^2 + 2 r x y = c r \quad \dots \textcircled{3}$$

消去法より②, ③より x を消去すると

$$l x^2 + (2 r z) x + (n z^2 - b r) = 0$$

$$l x^2 + (2 r y) x + (m y^2 - c r) = 0 \text{ より}$$

より

$$\{l(m y^2 - c r) - l(n z^2 - b r)\}^2 - (l \cdot 2 r y - l \cdot 2 r z) \{2 r z(m y^2 - c r) - 2 r y(n z^2 - b r)\} = 0$$

l で割って

$$l \{(m y^2 - n z^2) + r(b - c)\}^2 - 4 r^2 (y - z) \{m y^2 z - n y z^2 + r(b y - c z)\} = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

④の第1項は

$$l(m y^2 - n z^2)^2 + 2 l(m y^2 - n z^2) \cdot r(b - c) + l r^2 (b - c)^2 \quad \dots \textcircled{5}$$

④の第2項は

$$4 r^2 \{m y^3 z - m y^2 z^2 - n y^2 z^2 + n y z^3 + b r y^2 - b r y z - c r y z + c r z^2\} \\ = 4 r^2 \{y z(m y^2 + n z^2) - (m + n) y^2 z^2 - r(b + c) y z + r(b y^2 + c z^2)\} \quad \dots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥と①を見比べ,

$$(m y^2 - n z^2)^2 = (m y^2 + n z^2)^2 - 4 m n y^2 z^2 \\ = (a r - 2 r y z)^2 - 4 m n y^2 z^2 \\ = a^2 r^2 - 4 a r^2 y z + (4 r^2 - 4 m n) y^2 z^2$$

であるから, ⑤, ⑥から取り出した

$$2 l(m y^2 - n z^2) \cdot r(b - c) - 4 r^3 (b y^2 + c z^2) \quad \dots \textcircled{7}$$

が $y z$ の式で表せたら, ④は $y z$ だけの方程式になる.

⑦の y^2 の係数は

$$2 r \{l m (b - c) - 2 b r^2\} \quad \dots \textcircled{8}$$

ここで, $s - a = l$, $s - b = m$, $s - c = n$, ヘロンの公式より

$$s(s - a)(s - b)(s - c) = s^2 r^2$$

$$\therefore l m n = (s - a)(s - b)(s - c) = s r^2$$

より

$$= 2 r \{l m (n - m) - 2 (s - m) r^2\} \\ = 2 r (-l m^2 - l m n + 2 m r^2)$$

$$\begin{aligned}
&= 2mr \{-l(m+n) + 2r^2\} \\
&\quad m+n = 2s - b - c = a \\
&= 2mr(-al + 2r^2)
\end{aligned}$$

⑦の z^2 の係数は

$$\begin{aligned}
&-2lnr(b-c) - 4r^3c \\
&= 2r\{-ln(n-m) - 2r^2(s-n)\} \\
&= 2r(-ln^2 - lmn + 2r^2n) \\
&= 2nr(-al + 2r^2)
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
⑦ &= 2r(-al + 2r^2)(my^2 + nz^2) \\
&= 2r(-al + 2r^2)(ar - 2ryz)
\end{aligned}$$

以上で、④を①を用いて、 yz だけの式に出来ることが証明された。④すなわち⑤-⑥を yz だけの式に直そう。

$$\begin{aligned}
&1\{a^2r^2 - 4aar^2yz + (4r^2 - 4mn)y^2z^2\} \\
+ &2r(-al + 2r^2)(ar - 2ryz) \\
+ &1r^2(b-c)^2 \\
- &4r^2\{yz(ar - 2ryz) - (m+n)y^2z^2 - r(b+c)yz\} = 0 \\
&\dots ⑨
\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}
&(\text{⑨の定数項}) = 1a^2r^2 + 2r(-al + 2r^2)ar + 1r^2(b-c)^2 \\
&= -1a^2r^2 + r^2\{4aar^2 + 1(b-c)^2\} \\
&= 1r^2(b-c+a)(b-c-a) + 4aar^4 \\
&= -1r^2(2s-2c)(2s-2b) + 4aar^4 \\
&= 4r^2(ar^2 - lmn) \\
&= 4r^2(ar^2 - sr^2) \\
&= -4r^4l
\end{aligned}$$

(⑨の yz の項の係数)

$$\begin{aligned}
&= -4laar^2 + 2r(-al + 2r^2) \cdot (-2r) \\
&- 4r^2\{ar - r(b+c)\} \\
&= 4r^2\{-2r^2 - ar + r(b+c)\} \\
&= 4r^3\{-2r + (2s-2a)\} \\
&= -8r^3(r-1)
\end{aligned}$$

(⑨の $(yz)^2$ の項の係数)

$$\begin{aligned}
&= 1(4r^2 - 4mn) - 4r^2(-2r - (m+n)) \\
&= 4lr^2 - 4sr^2 - 4r^2(-2r - (m+n)) \\
&= 4r^2(1 - s + 2r + m + n) \\
&= 8r^3
\end{aligned}$$

以上より, $yz = t$ とおくと, tH

$$8r^3 t^2 - 8r^3(r-1)t - 4r^4 l = 0$$

$$\therefore 2t^2 - 2(r-1)t - r l = 0 \quad \dots \textcircled{10}$$

⑩の解は正負1つずつ持つから正の方をとり

$$yz = t = \frac{(r-l) + \sqrt{r^2 + l^2}}{2} = \alpha$$

$x, y, z; l, m, n$ をサイクリックに変えることにより

$$zx = \frac{(r-m) + \sqrt{r^2 + m^2}}{2} = \beta$$

$$xy = \frac{(r-n) + \sqrt{r^2 + n^2}}{2} = \gamma$$

ここで, $x = \sqrt{r_1}, y = \sqrt{r_2}, z = \sqrt{r_3}$ であるから

$$r_1 = \frac{\alpha \beta \gamma}{\alpha^2} = \frac{\beta \gamma}{\alpha}$$

$$r_2 = \frac{\alpha \beta \gamma}{\beta^2} = \frac{\gamma \alpha}{\beta}$$

$$r_3 = \frac{\alpha \beta \gamma}{\gamma^2} = \frac{\alpha \beta}{\gamma}$$